Zu Gleichgewicht und Stabilität elektrostatischer Plasmastrukturen unter teilweiser Berücksichtigung externer Magnetfelder mit Anwendung auf die erdnahe Magnetosphäre

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Physik

und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

FRANCISCO ROGERIO FONTENELE ARAGÃO

aus

Viçosa do Ceará/Brasilien

Bochum 1983

UNIV.
LEIDEN
ZOOL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0049

Zu Gleichgewicht und Stabilität elektrostatischer Plasmastrukturen unter teilweiser Berücksichtigung externer Magnetfelder mit Anwendung auf die erdnahe Magnetosphäre

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Physik

und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

FRANCISCO ROGERIO FONTENELE ARAGÃO

aus

Viçosa do Ceará/Brasilien

Bochum 1983

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

Dissertation eingereicht am	17. Oktober 1983
Tag der mündlichen Prüfung	23. November 1983
Referent	Prof. Dr. K. Schindler
Korreferent	Priv.-Doz. Dr. H. Schamel

Zusammenfassung

Wir untersuchen in dieser Arbeit selbstkonsistente Lösungen für ein elektrisches Feld parallel zu einem räumlich variablen Magnetfeld in Hinblick auf eine Beschreibung der in der erdnahen Magnetosphäre beobachteten elektrischen Feldstrukturen. Zu diesem Zweck betrachten wir eindimensionale Modelle ohne Teilchenreflexion und Teilcheneinfang. Wir berücksichtigen eine lokale Abweichung der Quasineutralität als Folge von Veränderungen des Plasmazustandes in der Ionosphäre oder der Magnetosphäre mit einer Zeitkonstanten kleiner als die Stromrelaxiationszeit. Wir betrachten drei Fälle: (I) konstantes Magnetfeld, (II) räumlich variables Magnetfeld und (III) variables Magnetfeld und ungeordnete Bewegung.

Mit Hilfe eines Modells für die Bewegung eines fiktiven Teilchens in einem Potential zeigen wir qualitativ die oszillatorische Natur der Lösungen für das elektrische Potential. Bei nicht konstantem Magnetfeld erhalten wir eine variable Amplitude für das Potential. Das zeigen wir sowohl mit Hilfe einer adiabatischen Invariaten als auch mit analytischer Integration der Poisson-Gleichung.
Für die drei Fälle I, II und III haben wir den Lösungsraum der Poisson-Gleichung untersucht. Nach numerischen Rechnungen, bei denen die Abweichung von der Quasineutralität berücksichtigt wird, weisen wir die Existenz von Lö-

UNIV. LIBRARY BERL.

sungen für das elektrische Potential nach, die sowohl eine oszillatorische Struktur als auch einen glatten Verlauf haben. Die entsprechenden Potentialdifferenzen können viel größer als die Potentialdifferenz sein, die die Annahme der Quasineutralität eindeutig erzwingt. Durch Vergleich zwischen den Lösungsdiagrammen der drei hier behandelten Fälle ist es möglich, die Wirkung eines variablen Magnetfeldes und einer kinetischen Temperatur in der Verteilungsfunktion zu analysieren. Die berechneten lokalen Potentialstrukturen können die beobachtete Potentialdifferenz zwischen Magnetosphäre und Ionosphäre erklären. Die Ergebnisse sind konsistent mit der Beobachtung von elektrischen Feldstrukturen in der erdnahen Magnetosphäre. Aus unseren Rechnungen ergeben sich Werte für das elektrische Feld, die den gemessenen Werten der parallelen Komponenten des elektrischen Feldes etwa entsprechen.

Mit Hilfe der Lyapunov-Methode nach der Verallgemeinerung von Fowler haben wir die Stabilität von BGK-Gleichgewichten untersucht. Mit diesem Verfahren zeigen wir im Rahmen einer Näherung ohne Magnetfeld und mit monoenergetischen Teilchen, daß die Potentialstrukturen gegenüber Störungen ohne Ionendynamik stabil sind. Bei der vollständigen Stabilitätsanalyse mit Ionendynamik für inhomogene Gleichgewichte zeigen wir, unter welchen Bedingungen das Konstruktionsverfahren nicht zu einem Lyapunov-Funktional führt. Für den Fall ohne Relativbewegung zwischen Ionen und Elektronen wurde gezeigt, daß ein Lyapunov-Funtional existiert.

Inhalt

1.	Einleitung und Problemstellung	1
1.1	Elektrische Felder oberhalb der Ionosphäre	1
1.2	Notwendigkeit für nicht-quasineutrale Modelle	5
1.3	Bisherige quantitative Modelle	8
1.4	Fragestellung	11
2.	Stationäre Systeme	15
2.1	Beschreibung des Modells	15
2.2	Qualitative Aussagen	33
2.3	Adiabatische Invariante für kleine dB/dx	42
2.4	Erweiterung der BGK-Theorie für $B \neq 0$	47
2.4.1	Die BGK-Theorie für $B = 0$	47
2.4.2	Der Fall $\nabla B \neq 0$ ohne eingeschlossene Teilchen	50
2.4.3	Der Fall $\nabla B \neq 0$ mit eingeschlossenen Teilchen	58
2.5	Die Parameter für Quasi-Neutralität. Explizite Form des Magnetfeldes	61
2.5.1	Beziehung zwischen den Parametern	61
2.5.2	Das Magnetfeld	68
2.5.3	Das quasi-neutrale elektrische Potential ψ_{QN}	70
2.6	Numerische Lösung	73
2.6.1	Das numerische Verfahren	73
2.6.2	Beispiele für numerische Lösungen	76
2.6.3	Die Lösungsdiagramme	79
2.6.4	Die Bifurkation im Lösungsdiagramm	87
2.6.5	Das Potential und die Dichte	90
2.6.6	Diskussion	101

3. Zur Stabilität 105

3.1 Vorbetrachtungen 105

3.2 Das dynamische Modell 106

3.3 Das Lyapunov-Verfahren nach Fowler 111

3.4 Der Fall ohne Ionen-Störungen 113

3.5 Der Fall mit Ionen-Störungen 119

3.5.1 Formulierung 119

3.5.2 Analyse der Definitheit von $\dot{P}$ 123

3.6 Diskussion 127

4. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse 130

Literatur 133

1. Einleitung und Problemstellung

1.1 Elektrische Felder oberhalb der Ionosphäre

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von selbstkonsistent berechneten elektrischen Feldern parallel zu einem statischen räumlich variablen vorgegebenen Magnetfeld als Modell für den Beschleunigungsmechanismus von elektrisch geladenen Teilchen in der erdnahen Magnetosphäre. Die Untersuchung besteht aus einer selbstkonsistenten Beschreibung der elektrischen Felder im Gleichgewicht sowie aus Beiträgen zu deren Stabilitätsanalyse.

Eine der ersten interessanten Satellitenbeobachtungen in einer Höhe von 1000 km bis 2000 km über dem Polgebiet der Erde war das "Invertierte-V-Ereignis" (Frank und Ackerson, 1971; Frank und Gurnett, 1971). Diese sind Bänder von Elektronenströmen parallel zum Erdmagnetfeld mit einer Breite von ca. 50 km bis 150 km. Beim Durchlaufen der Strecke P_1P_2 (Abb. 1-1b) beobachtet der Satellit einen Elektronenstrom, dessen mittlere kinetische Energie allmählich von einigen hundert eV bis zu einem Maximum von typischen 10 keV zunimmt und dann wieder abnimmt (Abb. 1-1a). Gleichzeitige Messungen der Komponenten des elektrischen Feldes sowie der Energie von Protonenströmen haben zu einem Modell für das elektrische Feld geführt, das in der Abb. 1-1 gezeigt wird.

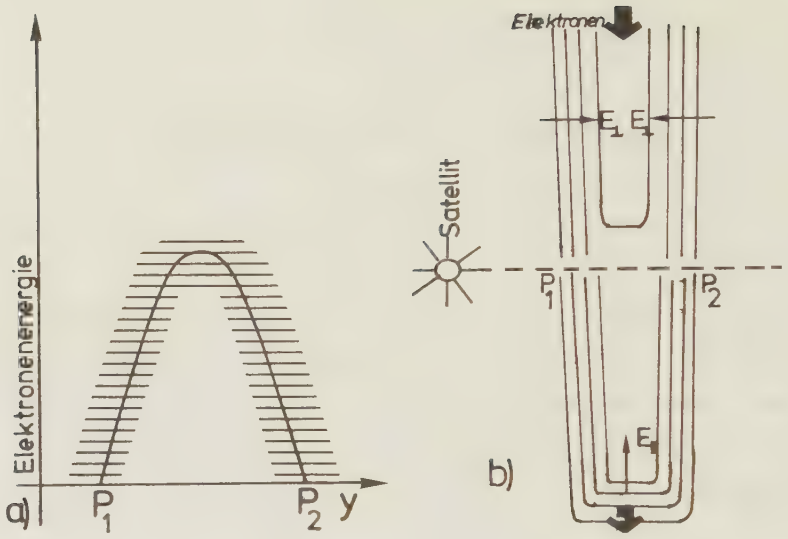


Abb. 1-1. (a) "Invertiertes-V-Ereignis" und (b) entsprechende vorgeschlagene elektrostatische Äquipotentiallinien.

Weitere Experimente mit Bariumwolken zwischen Ionosphäre und Magnetosphäre (Wescott et al., 1975; 1978) sowie die Experimente von Skylab (Wescott et al., 1976a, b) haben die Korrelation zwischen parallelen elektrischen Feldern oberhalb der Ionosphäre und Auroras gezeigt sowie weitere Evidenzen für das Modell der Abb. 1-1 beigebracht. Bei diesen Experimenten wird in einer Höhe von ca. 500 km mit Hilfe von Sprengstoff ein Strahl von metallischem Barium längs der Magnetfeldlinien erzeugt. Die Bewegung des durch UV-Strahlung ionisierten Bariums kann über einige tausend Kilometer aus Bodenstationen oder im Fall von Skylab aus einer Raumfähre verfolgt werden. Damit kann eine Magnetfeldlinie sichtbar gemacht werden und durch ihre Extrapolation kann die Korrelation zwischen Auroras und Beschleuni-

gung der Bariumteilchen untersucht werden.

Auroras sind Leuchterscheinungen, die meistens in Form von regelmäßigen oder unregelmäßigen farbigen leuchtenden Bändern im Polargebiet beobachtet werden. Die Bänder sind ca. 10 km bis 20 km breit und erstrecken sich 100 km oder mehr in der magnetischen Ost-West-Richtung. Die typische Lage für die Auroras sind 100 km oberhalb der Erdoberfläche mit einer vertikalen Ausdehnung von ca. 50 km. Die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtungen von Auroras hat ein Maximum in der Polarlichtzone, einem ringförmigen Gebiet mit einem Radius von ca. 22^{o} um jeden geomagnetischen Pol. Elektronen mit 5 - 10 keV längs der irdischen Magnetfeldlinien erreichen die obere Atmosphäre und erregen durch Zusammenstöße mit Komponenten des atmosphärischen Gases die Lichterscheinungen des Polarlichtes. Bezüglich der sehr umfangreichen Literatur verweisen wir auf die Monographien von Chamberlain (1961) und Jones (1974).

Sehr wichtige Daten lieferten die in situ-Messungen des Satelliten S3-3 von elektrischen Feldern, Teilchenströmen und Plasmadichten in Höhen zwischen 2000 und 8000 km. Die ersten Auswertungen der Daten (Mozer et al., 1977) haben Strukturen von lokalisierten elektrischen Feldern gezeigt, die in 50 v.H. der Fälle größer als 120 mV/m sind. In seltenen Fällen wurden für einzelne Komponenten des elektrischen Feldes Werte bis 400 mV/m gemessen. Der erwartete Wert für die Komponente des elektrischen Feldes senkrecht zum Magnetfeld bei Extrapolation der ionosphärischen Daten

ist für eine Höhe von 6000 km nur ca. 25 mV/m, während der Mittelwert des parallelen elektrischen Feldes bei ca. 1mV/m liegt (Mozer et al., 1980). In diesen Strukturen und in ihrer Nähe sind in einigen Fällen sehr große Absenkungen der Plasmadichte beobachtet worden, die die Grenze des Detektors ($\gtrsim 1$ cm^{-3}) erreichten. Sonst liegt die Plasmadichte zwischen 5 cm^{-3} bis 50 cm^{-3}.

Nach der ersten Analyse der Daten des Satelliten S3-3 haben Mozer et al. (1977) die Meinung vertreten, daß die Äquipotentiallinien der Abb. 1-1b die von Swift (1976) vorgeschlagene Form eines spitzen V haben sollen und daß die Messungen inkonsistent seien mit dem Doppelschicht-Modell von Block und Fälthammar (1976).

Nach weiteren Auswertungen neuerer Daten von S3-3 hat die Gruppe um Mozer eine andere Vorstellung vertreten. Sie sind zu dem Schluß gekommen, daß das V-Modell weniger als 50 v.H. erklären kann, so daß andere Geometrien in Betracht gezogen werden müssen (Mozer et al., 1980).

Temerin et al. (1982) haben aus den Daten des Satelliten S3-3 gezeigt, daß es Strukturen gibt, bei denen die parallele Komponente des elektrischen Feldes in Richtung der Magnetosphäre dominiert. Für diese Strukturen, die mit mittlerem Zeitabstand von 0,1 s beobachtet werden, wurde eine Geschwindigkeit von ca. 50 km/s geschätzt, wobei in dieser Region die typische Geschwindigkeit eines Protons zwischen 200 km/s bis 600 km/s liegt. Die Länge einer Struktur parallel

zum Magnetfeld für ein gezeigtes Beispiel war 200 m. Temerin et al. (1982) schließen aus ihren Daten, daß die senkrechte charakteristische Länge so groß wie die parallele charakteristische Länge sein kann. In solchen Fällen könnte das U-Modell für die Äquipotentiallinien angenommen werden.

In der vorliegenden Arbeit haben wir in erster Näherung eine eindimensionale Beschreibung für das Potential angenommen. Das bedeutet, daß wir angenommen haben, daß die charakteristische Länge der senkrechten Komponente viel größer als die charakteristische Länge der parallelen Komponente ist.

1.2 Notwendigkeit für nicht-quasineutrale Modelle

Die beobachteten Strukturen der elektrischen Felder in der erdnahen Magnetosphäre mit charakteristischer Länge $L \gtrsim 200$ m (Temerin et al., 1982) stimmen nicht mit der Annahme überein, daß das Plasma quasineutral (s. z.B. Chen, 1974; S. 10) ist. Wegen der starken Abweichung der Verteilungsfunktion für die Teilchen des Teilchenstromes gegenüber einer Maxwell'schen Verteilungsfunktion (Mizera et al., 1981) benutzen wir als charakteristische Länge der Ladungsdichte eine generalisierte Debye-Länge (Krall und Trivelpiece, 1973; S. 434), wobei die mittlere kinetische Energie die Rolle der Temperatur übernimmt. Die gemessenen Verteilungsfunktionen für die Ionen zeigen Maxima, die bei einer kinetischen Energie zwischen 1 keV und 12 keV liegen. Schon eine kinetische Energie von 2,5 keV entspricht einer charakteristischen Länge der Ladungsdichte von $\lambda_D \simeq 350$ m. Da L und λ_D die gleiche Größen-

ordnung haben, kann die Annahme der Quasineutraliät $L >> \lambda_D$ nicht mehr gerechtfertigt werden. Das bedeutet mit anderen Worten, daß wegen ihrer eindeutigen Bestimmung die quasineutrale Lösung des Potentials zu stark eingeschränkte Randbedingungen hat und - wie wir zeigen werden - zu geringe Potentialdifferenzen und deshalb nicht in der Lage ist, die beobachteten Strukturen des elektrischen Feldes zu erklären.

Die Abb. 1-2 zeigt das vereinfachte Ersatzschaltbild für die Kopplung zwischen Magnetosphäre und Ionosphäre. L stellt die Induktivität und R_I den Widerstand der Ionosphäre dar. V ist eine induzierte Urspannung, die ihren Ursprung in der zum Erdmagnetfeld senkrechten Bewegung von Plasma in der Magnetosphäre haben kann (Alfvén, 1981; S. 36). I ist der Strom längs der Magnetfeldlinien, Birkeland-Strom genannt.

Für eine Länge der Strecke A und B von ca. 20 Erdradien, eine Dichte von 1 cm^{-3} und eine Stromdichte von ca. 1 μAm^{-3} ist die Stromrelaxationszeit $\tau_I = L/R \approx 10$ min, wenn wir annehmen, daß die Stromschicht 10 km dick ist und der Abstand zwischen beiden Stromschichten ca. 200 km ist (Arnoldy, 1974; Anderson und Vondrak, 1975).

Falls eine Änderung der Leitfähigkeit der Ionosphäre in einem Zeitintervall $\tau_R < \tau_I$ stattfindet, folgt inmittelbar eine Änderung der Potentialdifferenz $\phi_o - \phi_1$ oder/und $\phi_2 - \phi_3$. Für diese schnelle Änderung der Potentialdifferenz

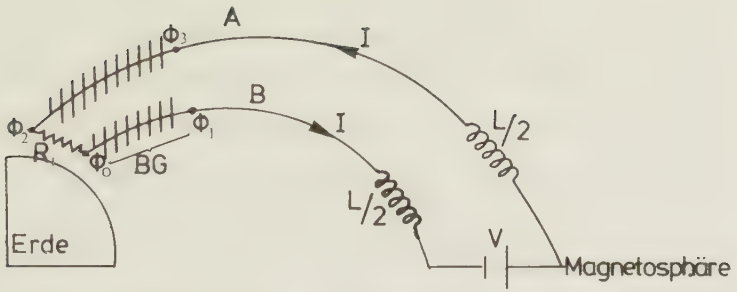


Abb. 1-2. Vereinfachtes Ersatzschaltbild für die Kopplung zwischen Ionosphäre und Magnetosphäre. BG ist das Beschleunigungsgebiet.

kann die Annahme einer quasineutralen Randbedingung nicht mehr begründet werden. Hier soll noch erwähnt werden, daß eine Kopplung zwischen Birkeland-Strom und Leitfähigkeit der Ionosphäre zu erwarten ist, weil die ionosphärische Leitfähigkeit vom Ionisationsgrad der Ionosphäre abhängt, welcher vom ionisierenden Teilchenstrom auch abhängt.

Ein anderer möglicher Vorgang ist eine Änderung von V mit einer Zeitkonstanten kleiner als τ_I. In diesem Fall findet auch unmittelbar eine Variation der Potentialdifferenz statt und die Quasineutralitätsbedingung ist nicht mehr anwendbar. Diese Abweichung von der Quasineutralität wurde von Schindler und Birn (1978) vorgeschlagen.

1.3 Bisherige quantitative Modelle

Obwohl das Interesse an Modellen für die Struktur des durch Teilchenströme erzeugten elektrischen Feldes alt ist (Langmuir, 1913; 1929), ist die Zahl der Arbeiten in diesem Gebiet in den letzten zwei Jahrzehnten groß geworden, vor allem in Hinblick auf ein Modell für die beobachteten Strukturen in der erdnahen Magnetosphäre. In experimentellen Arbeiten wurde dieses Problem auch im Laborversuch untersucht (z.B. Quon und Wong, 1976; Leung, Wong und Quon, 1981).

Persson (1963) und Alfvén und Fälthammar (1963; S. 162) haben die Existenz der parallelen Komponente von E in einem Magnetfeld mit Spiegelkonfiguration für monoenergetische Teilchen untersucht. Bei der Erfüllung der Quasineutralitätsbedingung hängt die Existenz eines stationären elektrischen Feldes in diesem Fall von dem Unterschied zwischen den Pitch-Winkeln für die Teilchensorte ab. Persson studiert unter den gleichen Bedingungen für Magnetfeld und Quasineutralität die Existenz von $E_{\parallel}$ für verschiedene Parameter, die die monoenergetischen Verteilungsfunktionen beschreiben und bewies Sätze über Existenz und Eindeutigkeit für die Verteilungsfunktion und die Felder.

Carlqvist und Boström (1970) haben vorgeschlagen, daß die beobachtete Teilchenbeschleunigung in der erdnahen Magnetosphäre durch die Existenz von Raumladung erklärt werden könnte. Block (1972) hat ein vereinfachtes Doppelschicht-Modell ohne Magnetfeld mit Hilfe einer Flüssigkeitstheorie entwickelt,

das dem Beispiel einer Diode mit in Schichten konzentrierter Raumladung ähnelt, wo wegen des starken elektrischen Feldes die Bedingung für Quasineutralität nicht mehr erfüllt ist. Die wichtigste Einschränkung dieses Modells ist die Annahme einer Maxwellschen Verteilung, die unter der Wirkung eines elektrischen Feldes nicht aufrechterhalten werden kann. Block sah seine Theorie als eine qualitative Beschreibung an und schlug vor, daß für eine genaue Beschreibung des Problems eine stoßfreie Theorie benutzt werden muß.

Swift (1975) entwickelte ein Modell für einen stationären elektrostatischen Schock schräg zum Magnetfeld, bei dem wie bei Block (1972) eine zeitunabhängige Potentialdifferenz auftritt, die von den Teilchenströmen aufrechterhalten wird. Das Magnetfeld wurde als konstant angenommen, aber die Abmessung des Potentialsprungs parallel zum Magnetfeld konnte das Modell nicht liefern, und deshalb konnte das Modell nichts über die Stärke des parallelen elektrischen Feldes aussagen. Für Kan (1975) liegt der Unterschied zwischen dem elektrostatischen Schock von Swift (1975) und der Doppelschicht von Block (1972) in den Randbedingungen, welche mit ihren äußeren Energiequellen zusammenhängen. Obwohl beide Lösungen des Vlasov-Poisson-Systems sind, hat der Schock seine Energiequelle in der kinetischen Energie des Teilchenstromes, während die Doppelschicht in der aufgezwungenen Potentialdifferenz ihre Energiequelle hat.

In einem anderen Modell hat Swift (1976a, b) ein zweidimensionales Modell beschrieben mit dem Ziel, die Größe des Potentialsprungs und damit des elektrischen Feldes zu bestimmen. Obwohl das Modell eine Potentialdifferenz längs der Magnetfeldlinien von 2,3 keV erklären kann, ist die charakteristische Länge von $E_{\parallel}$ ca. 1 Erdradius. Das ist weder konsistent mit den beobachteten Werten des elektrischen Feldes noch mit der Annahme, daß das Magnetfeld räumlich in diesem Bereich konstant ist.

Chiu und Cornwall (1980) haben das Modell von Swift (1975) für ein räumlich variables Magnetfeld verallgemeinert. Trotzdem sind die vom Modell gelieferten Werte für das parallele elektrische Feld nicht mit den Beobachtungen konsistent. In seinem Modell entwickelt Stern (1981) die Ideen von Persson (1963, 1966) weiter und unterpretiert die Diskontinuitäten der quasineutralen Lösungen als Existenz einer Doppelschicht. Wie bei den anderen Modellen konnten die experimentellen Daten für $E_{\parallel}$ nicht reproduziert werden.

Es ist zu bemerken, daß alle hier besprochenen Modelle reflektierte Teilchen berücksichtigen und aus den oben genannten Arbeiten nicht immer klar ist, welche Rolle Teilchenreflexionen und Teilcheneinfang spielen, da für einige Modelle ad hoc Annahmen für die Teilchendichte am Rand gemacht werden.

Ein andere Reihe von Arbeiten, die sich mit der Existenz und Stabilität von Doppelschichten ohne Magnetfeld befassen,

müssen hier erwähnt werden. Die mögliche Existenz eines Potentialsprungs wurde von Bernstein, Greene und Kruskal (BGK) (1957) zum ersten Mal diskutiert. Knorr und Goertz (1974) haben die BGK-Theorie benutzt, um die Existenz von Potentialsprüngen zu zeigen. Ferner wurde von ihnen mit Hilfe des Penrose-Kriteriums die Stabilität des Plasmas gezeigt, falls die Abweichung von der Homogenität des Plasmas klein ist.

Statt der von BGK vorgeschlagenen Methode, die eine analytische Beschreibung erschwert, hat Schamel (1974) eine andere Methode entwickelt, die unphysikalische Lösungen ausschließt. Mit dieser Methode ist es Schamel und Bujarbarua (1980) gelungen, doppelschichtartige Strukturen zu berechnen. Die Stabilitätsanalyse vom BGK-Problem wurde für einen Hintergrund von festen Ionen mit einem monoenergetischen Strahl von Elektronen von Infeld (1972) und für monoenergetische Strahlen für beide Teilchensorten von Infeld und Rowlands (1973) gemacht. Die Stabilität von Doppelschichten wurde mit Hilfe einer Normalmode-Analyse von Schamel (1983) für Doppelschichten mit Potentialdifferenz $\Delta\phi$ klein gegenüber kT/e durchgeführt und für die Analyse von experimentellen Daten benutzt.

1.4 Fragestellung

Wenn man die in Kapitel 1.1 beschriebenen Beobachtungen und die in Kapitel 1.3 genannten theoretischen Modelle betrachtet, stellt man fest, daß einige Lücken bleiben. Wie

wir in Kapitel 1.2 gezeigt haben, sind die beobachteten Strukturen nicht konsistent mit der Annahme von Quasineutralität, was dazu führt, daß einige Modelle ausgeschlossen werden. Wegen der Tatsache, daß der Anteil der kinetischen Energie der Teilchen bezüglich der Bewegung senkrecht zum Magnetfeld von der gleichen Größenordnung ist wie der Anteil der kinetischen Energie parallel zum Magnetfeld, kann die Annahme eines konstanten Magnetfeldes innerhalb eines Bereiches der Größenordnung eines Erdradius wegen der auftretenden Kräfte (vgl. Gl. (2-8)) nicht begründet werden. Auch die Berücksichtigung von $\underline{E} \times \underline{B}$-Drift zwischen Polargebiet und Äquatorebene in einigen Modellen erfordert eine genaue Analyse von allen Driften, die das inhomogene gekrümmte Erdmagnetfeld verursachen kann. Obwohl einige Modelle die experimentellen Daten der senkrechten Komponente des elektrischen Feldes gut reproduzieren, sind keine in der Lage, die beobachtete Struktur parallel zum Magnetfeld zu erklären.

Die Stabilitätsanalyse des hier behandelten Problems ist sehr schwierig und bleibt deshalb bis heute unbefriedigend. Der Grund ist, daß die erfolgreichsten Methoden für die Analyse von Stabilität sich auf diesem Gebiet nicht anwenden lassen, weil sie nur für homogenes Plasma geeignet sind. Andere Methoden erfordern Näherungen, die auf der Laborskala vertretbar sind, sie lassen sich aber im Fall der Ionosphäre nicht begründen.

In der hier vorliegenden Arbeit haben wir uns zum Ziel gesetzt, einige der oben genannten Lücken zu schließen. Wir haben ein Modell entwickelt, das die Rolle von Temperatur und Magnetfeldgradienten in der Aufrechterhaltung der parallelen Komponente des elektrischen Feldes analysieren kann. In der Analyse der Stabilität der Lösung haben wir wegen der großen Schwierigkeiten eine Methode entwickelt, die auf Systeme ohne Magnetfeld und mit monoenergetischen Teilchen beschränkt ist.

Wir gehen in dieser Arbeit in der folgenden Weise vor:

Im Teil 2 wird das Gleichgewicht behandelt. Das Kapitel 2.1 dient dazu, das Modell zu beschreiben und die Grundgleichungen herzuleiten. Behandelt werden die Fälle von monoenergetischen Teilchen sowie auch Teilchen mit ungeordneten Bewegungen. Im Kapitel 2.2 wird eine qualitative Analyse der erwarteten Lösungen mit Hilfe des Modells eines fiktiven Teilchens in einem Potentialtopf durchgeführt.

Im Kapitel 2.3 analysieren wir den Effekt eines Gradienten des Magnetfeldes auf das elektrische Potential mit Hilfe der Theorie der adiabatischen Invarianten. Im Kapitel 2.4 haben wir die BGK-Theorie für die Berücksichtigung des Magnetfeldes generalisiert. Für einige spezielle Fälle wurde die Gleichung für das elektrische Potential analytisch integriert und die Wirkung eines schwachen Gradienten von B auf das Potential studiert. In Kapitel 2.5 werden die Para-

meter der Quasineutralitätsbedingung numerisch berechnet. Die Form der Darstellung des Erdmagnetfeldes wird im Abschnitt 2.5.2 diskutiert und in 2.5.3 wird eine quasineutrale Lösung gezeigt.

Im Kapitel 2.6 zeigen wir das numerische Verfahren für die Lösung der Poisson-Gleichung und stellen mit Hilfe von Lösungsdiagrammen den Lösungsraum für die Poisson-Gleichung dar. Betrachtet werden drei Fälle: (I) monoenergetische Teilchen und konstantes Magnetfeld, (II) monoenergetisches Teilchen und räumlich variables Magnetfeld und (III) Teilchen mit ungeordneter Bewegung und räumlich abhängiges Magnetfeld. Im Abschnitt 2.6.4 diskutieren wir die Bedeutung der Bifurkationen in den Lösungsdiagrammen im Zusammenhang mit der Stabilität der Lösungen. Im Abschnitt 2.6.5 werden die numerischen Ergebnisse in Form von Kurven für das Potential und für Ladungsdichte gezeigt und diskutiert.

Der Teil 3 ist der Stabilität gewidmet. Nach den Vorbetrachtungen im Kapitel 3.1 leiten wir das dynamische Modell in Kapitel 3.2 her. In Kapitel 3.3 wird das Lyapunov-Verfahren nach Fowler kurz dargestellt und im Kapitel 3.4 wird das Verfahren auf den Fall mit ungestörten Ionen angewandt. In Kapitel 3.5 wird der Fall mit Ionen-Störungen behandelt und die Grenze des benutzten Verfahrens studiert.

2. Stationäre Systeme

2.1 Beschreibung des Modells

Im folgenden soll ein einfaches stationäres Modell zur Beschreibung eines Plasmas vorgestellt werden, in dem Teilchenströme eine dominierende Rolle spielen. Es soll sich um ein eindimensionales Plasma handeln; das Gyrationszentrum der Teilchen soll sich dabei längs der Feldlinien des vorgegebenen inhomogenen Magnetfeldes bewegen. Die Bedingungen, unter denen das Plasma sich befindet, soll denjenigen ähnlich sein, die in der erdnahen Magnetosphäre der Erde beobachtet werden.

Abb. 2-1 zeigt schematisch den Verlauf der elektromagnetischen Felder in einem Gebiet der Magnetosphäre, das längs eines Magnetfeldes von zwei Teilchenströmen in entgegengesetzten Richtungen durchflossen wird (Block, 1975; Temerin et al., 1982). Bei diesen Strömen handelt es sich um den in der Ionosphäre entstehenden Ionenstrom und den Elektronenstrom aus der Magnetosphäre, die zusätzlich zum globalen elektrischen Feld in einem lokalisierten Bereich ein starkes elektrisches Feld parallel zum herrschenden Erdmagnetfeld erzeugen. Beide Teilchensorten werden durch das elektrische Feld im Mittel in entgegengesetzter Richtung beschleunigt. Im betrachteten Beschleunigungsgebiet, das durch die Ränder R_o und R_1 abgegrenzt wird, wirken entspre-

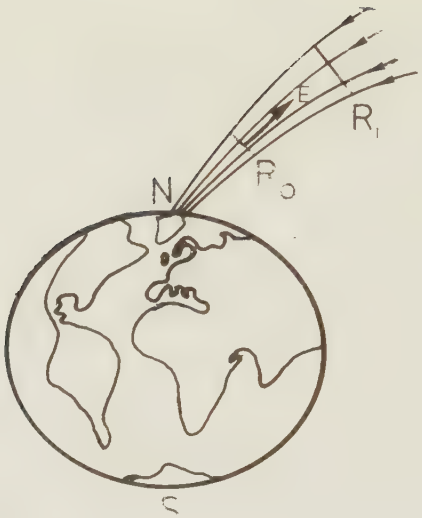


Abb. 2-1. Das Beschleunigungsgebiet oberhalb der Ionosphäre mit den Grenzen R_o und R_1 in schematischer Darstellung.

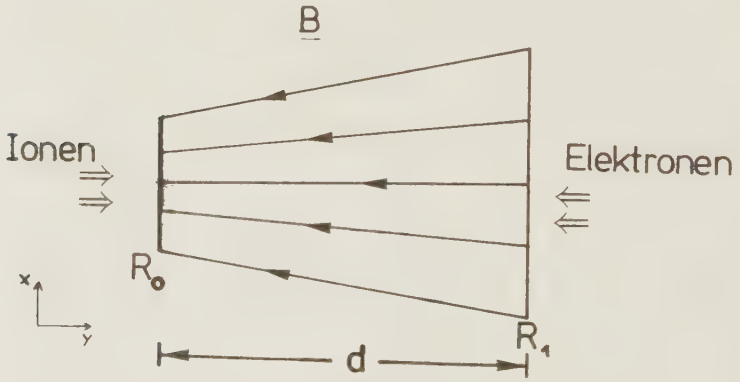


Abb. 2-2. Skizze der Struktur des Magnetfeldes im Beschleunigungsgebiet.

chend auf das Gyrationszentrum zwei Kräfte, die elektrische Kraft und eine magnetische Kraft, die von der Inhomogenität des Magnetfeldes herrührt.

Eine genaue Beschreibung des Problems erfordert die selbstkonsistente Berechnung des Magnetfeldes. In dem hier betrachteten Gebiet der Magnetosphäre ist das durch Ströme gemessene induzierte Magnetfeld (Mozer et al., 1980) vernachlässigbar klein ($< 1\%$) gegenüber dem Dipolfeld der Erde, so daß wir in unserem Modell das Magnetfeld als rotationsfrei und vorgegeben betrachtet haben.

Für die theoretische Beschreibung dieses Systems von elektromagnetischen Feldern und Teilchenströmen im stationären Zustand wird die kinetische Theorie für ein stoßfreies Plasma benutzt. Die Anwendung einer stoßfreien Theorie ist für Vorgänge gerechtfertigt, deren charakteristische Zeit viel kleiner als die Zeit zwischen zwei Stößen ist. Da viele von der stoßfreien Theorie beschriebenen Vorgänge eine charakteristische Zeit von der Ordnung der Periode der Elektronenplasmaoszillation τ_{pe} haben, ist $\tau_{ee}/\tau_{pe} \gg 1$ eine übliche Bedingung für die Anwendung der stoßfreien Theorie, wobei τ_{ee} die Stoßzeit für Elektron-Elektron-Stöße ist. Für den hier betrachteten Bereich der erdnahen Magnetosphäre ist $\tau_{ee}/\tau_{pe} \simeq 10^7$.

Das Problem wird durch das folgende System gekoppelter Integro-Differentialgleichungen (Vlasov-Theorie) beschrieben, das man aus der stoßfreien Boltzmann-Gleichung und den Maxwell-Gleichungen erhält:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \underline{r}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}}{c} \times \underline{B}\right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \underline{v}} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \sum_s q_s \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_s \, d^3v \qquad (2\text{-}2)$$

wobei s = i, e für Ionen bzw. Elektronen die Teilchensorte mit Masse m_s und Ladung q_s charakterisiert. Da das Magnetfeld als zeitlich unveränderlich und vorgegeben angenommen wird, bleibt von den Maxwell-Gleichungen nur die Poisson-Gleichung übrig.

Für ein stationäres Koordinatensystem ist $\partial/\partial t \equiv 0$ und Gl. (2-1) schreibt sich

$$\underline{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \underline{r}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}}{c} \times B\right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \underline{v}} = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

Die Lösung f_s von Gl. (2-3) läßt sich nun als Funktion von Konstanten der Bewegung K_n ausdrücken

$$f_s = f_s\left(K_1, K_2, K_3, \ldots\right) \qquad (2\text{-}4)$$

Die schwache räumliche Variation des Magnetfeldes in dem betrachteten Bereich der erdnahen Magnetosphäre macht die Berücksichtigung einer "Gyrations-Zentrum-Näherung" plausibel. Bei dieser Näherung, auch "adiabatische Näherung" genannt, wird für das Teilchen eine Kreisbahn angenommen, deren Zentrum sich quer und parallel zu den Magnetfeldlinien bewegt (Northrop, 1963).

Die Bedingungen für die adiabatische Näherung sind für statische Felder

$$\frac{\rho}{\mathcal{L}} \ll 1 \qquad (2\text{-}5a)$$

$$\frac{v_{\parallel}}{\omega \mathcal{L}} \ll 1 \qquad (2\text{-}5b)$$

wobei ρ der Gyrationsradius des Teilchens, ω die Gyrationsfrequenz, $v_{\parallel}$ die Komponente der Geschwindigkeit des Gyrationszentrums parallel zum Magnetfeld und $\mathcal{L}$ eine "charakteristische Länge" ist, innerhalb derer das Magnetfeld sich merklich ändert.

Es gibt Hinweise darauf, daß unter magnetosphärischen Bedingungen die Zahl der im Beschleunigungsgebiet eingefangenen Teilchen relativ klein ist (Mizera et al., 1981). Obwohl eine Berücksichtigung von Reflexionen und Teilcheneinfang sicherlich für eine Beschreibung von Details der interessierenden Vorgänge wichtig sein kann, schließen wir zunächst beide Phänomene aus im Hinblick auf die zentrale Frage, wie Teilchenstrom und Feldstrukturbei nicht erfüllter Bedingung der Quasi-Neutralität im Beschleunigungsgebiet zusammenhängen. Die Annahme von Reflexion und Einfang werden wir nur in einzelnen speziellen Fällen in Kapitel 2.5 behandeln.

Wenn Teilcheneinfang und Teilchenreflexion ausgeschlossen werden, kann man unter Berücksichtigung der adiabatischen

Näherung die Dynamik des Plasmas zwischen den Rändern R_o und R_1 mit Hilfe von drei Konstanten der Bewegung charakterisieren:

$$H = \tfrac{1}{2} m_s v_{\parallel}^2 + \tfrac{1}{2} m_s v_{\perp}^2 + \tfrac{1}{2} m_s u_E^2 + q_s \phi \qquad (2\text{-}6)$$

$$\mu = \tfrac{1}{2} m_s v_{\perp}^2 / B \qquad (2\text{-}7)$$

$$\sigma = \mathrm{sign}(v_{\parallel}) \qquad (2\text{-}8)$$

wobei hier

$$u_E = c\, \underline{E} \times \underline{B} / B^2$$

die einzige angenommene Driftgeschwindigkeit ist, da wegen des großen Krümmungsradius der Feldlinien (s. Roederer, 1970; S. 53) und des kleinen Gradienten des Magnetfeldes im betrachteten Gebiet der Magnetosphäre (Mozer et al., 1980) andere Driftgeschwindigkeiten vernachlässigbar klein sind. H ist die gesamte Energie des Teilchens, μ ist das magnetische Moment des Teilchens, σ stellt die Erhaltung der Richtung der parallelen Geschwindigkeit des Gyrationszentrums $v_{\parallel}$ längs der Feldlinie dar. Ferner bedeutet $v_{\perp}$ die Geschwindigkeit der Teilchen bezüglich ihrer Gyration um das Magnetfeld.

Die Lösung der Gl. (2-3) läßt sich als Funktion der drei Konstanten der Bewegung ausdrücken:

$$f_s(H, \mu, \sigma) = \theta(v_{\parallel})\, f_s^{+}(H, \mu) + \theta(-v_{\parallel})\, f_s^{-}(H, \mu) \qquad (2\text{-}9)$$

wobei f_s^+, f_s^- die Verteilungsfunktion für die Teilchen der Sorte s mit $v_\parallel > 0$ bzw. $v_\parallel < 0$ bezeichnet. Θ ist die Heaviside-Funktion:

$\Theta(v_\parallel) = +1$ wenn $v_\parallel > 0$ und $\Theta(v_\parallel) = 0$ wenn $v_\parallel \leq 0$

Wir nehmen an, daß das elektrische Feld eindimensional ist und die Richtung der Achse der kartesischen Koordinate y hat, wie in der Abb. 2-2 gezeigt wird. In diesem Fall schreibt sich die Poisson-Gleichung (2-2) für das eindimensionale elektrische Feld

$$\frac{dE}{dy} = 4\pi \sum_{s,\sigma} q_s \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_s^\sigma(H,\mu)\, d^3v \qquad (2\text{-}10)$$

Für den Zentralbereich des Beschleunigungsgebietes der Abb. 2-2 ist die Komponente $E_\perp$ des elektrischen Feldes senkrecht zu $\underline{B}$ relativ klein. Wir beschränken uns auf Lösungen in diesem Zentralbereich und können daher die Driftgeschwindigkeit U_E vernachlässigen, so daß H nicht mehr von E abhängt. Die Wahl eines in y-Richtung weisenden elektrischen Feldes ist mit der Feldrichtung eines U-förmigen Potentialverlaufs im Zentralgebiet konsistent.

Mit

$$d^3v = \pi\, dv_\perp^2\, dv_\parallel$$

$$v_\parallel \rightarrow |v_\parallel|$$

erhält man nach einer einfachen Variablentransformation

$$d^3v = \frac{2\pi}{m_s} \frac{B(r)}{|v_\parallel|} \, d\mu \, dH$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -4\pi B(r) \sum_s q_s \int_0^\infty \int_{H_{so}}^\infty \frac{2\pi}{m_s^2} \frac{[\Theta(v_\parallel) f_s^+(H,\mu) + \Theta(-v_\parallel) f_s^-(H,\mu)] \, d\mu \, dH}{\sqrt{H - q_s\phi(r) - \mu B(r)}}$$

(2-11)

wobei H_{so} so ausgewählt werden muß, daß $H - q_s\phi - \mu B$ immer positiv ist. Die Kurve $H_{so} = \max(q_s\phi(r) + \mu B(r))$ für $R_o \leq r \leq R_1$ definiert die Grenze, die Teilchenreflexion ausschließt. Bei der Betrachtung sollen nur solche Verteilungsfunktionen zugelassen sein, für die die adiabatische Näherung gültig ist. Die Abb. 2-3 zeigt in der schraffierten Fläche den Integrationsbereich von (2-11).

Wir nehmen in unserem Modell an, daß jede Teilchensorte sich nur in eine Richtung bewegt. Es gilt:

$$s = i : v_\parallel > 0$$
$$s = e : v_\parallel < 0 \qquad (2\text{-}12)$$

Auf der rechten Seite von Gl. (2-11) stehen die Ionendichte n_i und die Elektronendichte n_e. Wenn angenommen wird, daß es sich um einfach geladene Ionen handelt, kann man schreiben:

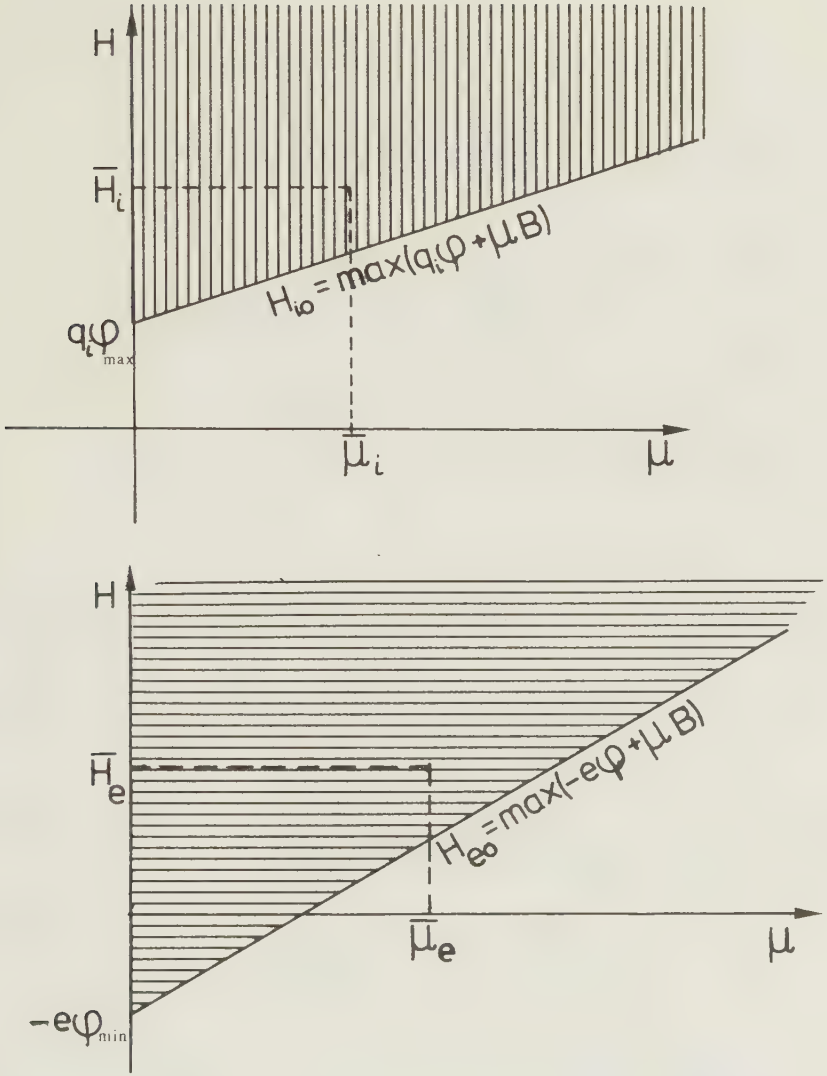


Abb. 2-3: Integrationsbereich der Gl. (2-11). a) für Ionen; b) für Elektronen. ϕ_{MAX} bzw. ϕ_{MIN} bezeichnen das Maximum bzw. das Minimum der Funktion $\phi(r)$.

$$n_i(r) = B(r) \int_0^{\infty} \int_{H_{io}}^{\infty} \frac{F_i^+(H,\mu)\, d\mu\, dH}{\left| \sqrt{\frac{2}{m_i}\left[H - e\phi(r) - \mu B(r)\right]} \right|} \qquad (2\text{-}13)$$

$$n_e(r) = B(r) \int_0^{\infty} \int_{H_{eo}}^{\infty} \frac{F_e^-(H,\mu)\, d\mu\, dH}{\left| \sqrt{\frac{2}{m_e}\left[H + e\phi(r) - \mu B(r)\right]} \right|} \qquad (2\text{-}14)$$

wobei $e = |q_s|$ und $F_s^{\sigma}(H,\mu) = (2\pi/m_s) f_s^{\sigma}(H,\mu)$ ist.

Fall A: Verteilungsfunktion ohne Temperatur.

Für eine Verteilungsfunktion

$$F_s^{\sigma}(H,\mu) = A_s^{\sigma}\, \delta(H - \bar{H}_s)\, \delta(\mu - \bar{\mu}_s) \qquad (2\text{-}15)$$

wobei A_s^{σ} eine Konstante und $\bar{H}_s > H_{so}$ vorausgesetzt ist (s. Abb. 2-3), ergibt sich

$$n_i(r) = \frac{A_i^+ B(r)}{\sqrt{\frac{2}{m_i}\left[\bar{H}_i - e\phi(r) - \bar{\mu}_i B(r)\right]}} \qquad (2\text{-}16a)$$

$$n_e(r) = \frac{A_e^- B(r)}{\sqrt{\frac{2}{m_e}\left[\bar{H}_e + e\phi(r) - \bar{\mu}_e B(r)\right]}} \qquad (2\text{-}16b)$$

Mit

$$P_s = \tfrac{1}{2} m_s v_{\parallel}^2 \qquad (2\text{-}17a)$$

$$S_s = \tfrac{1}{2} m_s v_{\perp}^2 \qquad (2\text{-}17b)$$

definieren wir den parallelen bzw. senkrechten Anteil der kinetischen Energie. Wir nehmen an dieser Stelle an, daß $\phi(r)$, $B(r)$ an beiden Rändern und n_s, P_s, S_s an einem der

beiden Ränder bekannt sind:

Am Rand R_o	Am Rand R_1	
$\phi = \phi_o$	$\phi = \phi_1$	(2-18a)
$B = B_o$	$B = B_1$	(2-18b)
$n_i = n_{io}$	---	(2-18c)
$P_i = P_{io}$	---	(2-18d)
$S_i = S_{io}$	---	(2-18e)
---	$n_e = n_{e1}$	(2-18f)
---	$P_e = P_{e1}$	(2-18g)
---	$S_e = S_{e1}$	(2-18h)

Unter Berücksichtigung der Bedingungen (2-18) läßt sich die Poisson-Gleichung (2-11) schreiben:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -4\pi e \left\{ \frac{B_1}{B_o} \frac{n_{io}\sqrt{P_{io}}}{\sqrt{P_{io} + S_{io} + e(\phi_o - \phi) - \bar{\mu}_{io} B}} - \frac{n_{e1}\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{P_{e1} + S_{e1} + e(\phi - \phi_1) - \bar{\mu}_{e1} B}} \right\} \frac{B}{B_1} \qquad (2\text{-}19)$$

In (2-19) haben wir benutzt

$$\bar{H}_i = P_{io} + S_{io} + e\phi_o \qquad (2\text{-}20)$$

$$\bar{H}_e = P_{e1} + S_{e1} - e\phi_1 \qquad (2\text{-}21)$$

Die Konstanten der Bewegung $\bar{\mu}_s$ sind gegeben durch

$$\bar{\mu}_i = S_{io} / B_o$$

$$\bar{\mu}_e = S_{e1} / B_1$$

Die Gl. (2-19) läßt sich in dimensionsloser Form schreiben

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{S}_{e1}+\psi(\xi)+\tilde{S}_{e1}\tilde{B}(\xi)}} - \frac{\eta}{b}\frac{\sqrt{\tilde{P}_{io}}}{\sqrt{\tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}+V-\psi(\xi)-\tilde{S}_{io}\tilde{B}(\xi)/b}} \right\} \tilde{B}(\xi) \qquad (2\text{-}22)$$

wobei die Koordinate ξ durch einen Parameter Λ dimensionslos gemacht ist, welcher die Bedeutung einer generalisierten Debye-Länge hat:

$$r = \Lambda\,\xi \qquad (2\text{-}23a)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{P_{e1}}{4\pi e^2 n_{e1}}} \qquad (2\text{-}23b)$$

Ferner werden definiert:

$$\psi(\xi) = (e\phi(\xi) - e\phi_1)/P_{e1} \qquad (2\text{-}23c)$$

$$\tilde{B}(\xi) = B(\xi)/B_1 \qquad (2\text{-}23d)$$

$$\tilde{S}_{e1} = S_{e1}/P_{e1} \quad ; \quad \tilde{S}_{io} = S_{io}/P_{e1} \qquad (2\text{-}23e)$$

$$\tilde{P}_{io} = P_{io}/P_{e1} \qquad (2\text{-}23f)$$

$$V = (e\phi_o - e\phi_1)/P_{e1} \qquad (2\text{-}23g)$$

$$\eta = n_{io}/n_{e1} \tag{2-23h}$$

$$b = B_o/B_1 \tag{2-23i}$$

Die Lösungen von (2-22) sind nun durch eine Reihe von Parametern charakterisiert. Wenn wir annehmen, daß außerhalb des betrachteten Bereiches (R_o, R_1) für die charakteristische Variationslänge L des elektrischen Potentials ψ

$$L >> \Lambda \tag{2-24a}$$

gilt, dann wird aus der Poisson-Gleichung für $\psi(\xi + L) - \psi(\xi) = 1$

$$\frac{\Lambda^2}{L^2} \approx \left| \frac{n_i - n_e}{n_e} \right| << 1 \tag{2-24b}$$

die Quasineutralitätsbedingung (Kunkel, Rosenbluth, 1966: S. 4)

$$n_i \simeq n_e \tag{2-25}$$

Die Bedingung (2-25) an den Rändern R_o und R_1 liefert Beziehungen zwischen den Parametern, die im Kapitel 2.5 explizit behandelt werden.

Fall B: Verteilungsfunktion mit Temperatur

Um den Einfluß einer Temperatur auf das System zu untersuchen, wird eine Verteilungsfunktion

$$F_s^{\sigma} = A_s^{\sigma} f_s(H)\, g_s(\mu) \qquad (2\text{-}26)$$

eingeführt, wobei $f_s(H) g_s(\mu)$, wie in Abb. 2-4 gezeigt, Kästenfunktionen mit den Breiten $2\Delta_s$ bzw. $2\delta_s$ sein sollen.

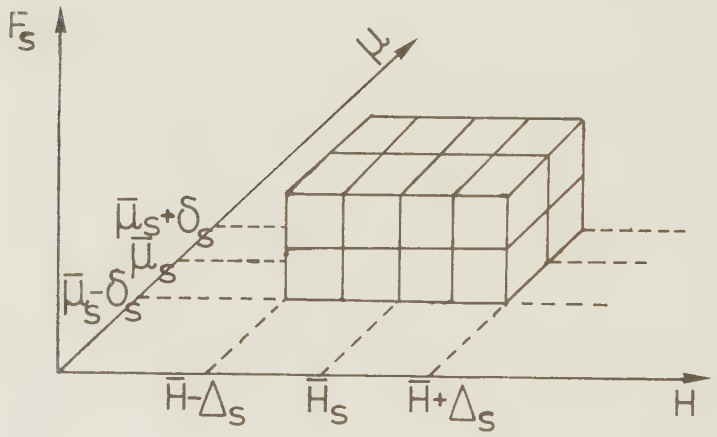


Abb. 2-4: Verteilungsfunktion mit Temperatur

Die Breiten $2\Delta_s$ bzw. $2\delta_s$ entsprechen Temperaturen bezüglich der Bewegung des Gyrationszentrums längs einer Feldlinie bzw. der Bewegung des Teilchens um die Feldlinie. Es handelt sich natürlich nicht um Temperaturen in thermodynamischem Sinne, sondern um ein Maß für die in der ungeordneten Bewegung vorhandene Energie. Wir lassen zu, daß die beiden Temperaturen verschieden sein können.

Mit dieser Annahme für die Verteilungsfunktion ist die Teilchendichte für die Teilchensorte s gegeben durch

$$n_s(r) = \pi A_s^6 \sqrt{\frac{m_s}{2}}\, B(r) \int_{\bar\mu_s-\delta_s}^{\bar\mu_s+\delta_s} d\mu \int_{\bar H_s-\Delta_s}^{\bar H_s+\Delta_s} \frac{dH}{\sqrt{H - q_s\phi - \mu B}} \qquad (2\text{-}27)$$

Die Integrationsgrenzen in (2-27) sollen den Ausschluß von Teilchenreflexionen berücksichtigen, da diese auch hier nicht zugelassen sind. Ferner sollen für alle Teilchen die Bedingungen (2-5) erfüllt sein.

Mit der Annahme, daß (2-18a), (2-18b), (2-18c) und (2-18f) auch hier gelten und daß (2-18d), (2-18e), (2-18g) und (2-18h) für die Zentralwerte $\bar H_s = P_s + \bar\mu_s B + q_s\phi$ gültig sind, liefert die Integration von (2-27) für einfach geladene Ionen

$$\begin{aligned}\frac{n_i(r)}{n_{io}} = \Big\{ &\left[H_{io} - \Delta_i - e\phi(r) - (\mu_{io} + \delta_i) B(r)\right]^{3/2} \\ &- \left[H_{io} - \Delta_i - e\phi(r) - (\mu_{io} - \delta_i) B(r)\right]^{3/2} \\ &- \left[H_{io} + \Delta_i - e\phi(r) - (\mu_{io} + \delta_i) B(r)\right]^{3/2} \\ &+ \left[H_{io} + \Delta_i - e\phi(r) - (\mu_{io} + \delta_i) B(r)\right]^{3/2} \Big\} \Big/ \end{aligned} \qquad (2\text{-}28)$$

$$\Big\{\Big[H_{io}-\Delta_i-e\phi_o-(\mu_{io}+\delta_i)B_o\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{io}-\Delta_i-e\phi_o-(\mu_{io}-\delta_i)B_o\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{io}+\Delta_i-e\phi_o-(\mu_{io}+\delta_i)B_o\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{io}+\Delta_i-e\phi_o-(\mu_{io}-\delta_i)B_o\Big]^{3/2}\Big\}$$

Entsprechend erhält man für die Teilchendichte $n_e(r)$

$$\frac{n_e(r)}{n_{e1}} = \Big\{\Big[H_{e1}-\Delta_e+e\phi(r)-(\mu_{e1}+\delta_e)B(r)\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{e1}-\Delta_e+e\phi(r)-(\mu_{e1}-\delta_e)B(r)\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{e1}+\Delta_e+e\phi(r)-(\mu_{e1}+\delta_e)B(r)\Big]^{3/2}$$
$$+\Big[H_{e1}+\Delta_e+e\phi(r)-(\mu_{e1}-\delta_e)B(r)\Big]^{3/2}\Big\}\Big/$$
$$\Big\{\Big[H_{e1}-\Delta_e+e\phi_1-(\mu_{e1}+\delta_e)B_1\Big]^{3/2} \qquad (2\text{-}29)$$
$$-\Big[H_{e1}-\Delta_e+e\phi_1-(\mu_{e1}-\delta_e)B_1\Big]^{3/2}$$
$$-\Big[H_{e1}+\Delta_e+e\phi_1-(\mu_{e1}+\delta_e)B_1\Big]^{3/2}$$
$$+\Big[H_{e1}+\Delta_e+e\phi_1-(\mu_{e1}-\delta_e)B_1\Big]^{3/2}\Big\}$$

Der Nenner von (2-28) bzw. (2-29) soll positiv sein, sonst muß $n_i(r) = 0$ bzw. $n_e(r) = 0$ gelten.

Die Grenze für Reflexion wird z.B. für die Ionen in der Abb. 2-5 gezeigt.

Die Bedingungen, daß jeder Radikand im Nenner von (2-28) nicht negativ sein soll, entspricht der Bedingung, daß die Ecken R_I, R_{II}, R_{III} und R_{IV} des Vierecks der Abb. 2-5 oberhalb der Grenze für Reflexion liegen. Es genügt nun, daß der zweite Radikand im Nenner von (2-28), der der Ecke R_{II} entspricht, nicht negativ ist:

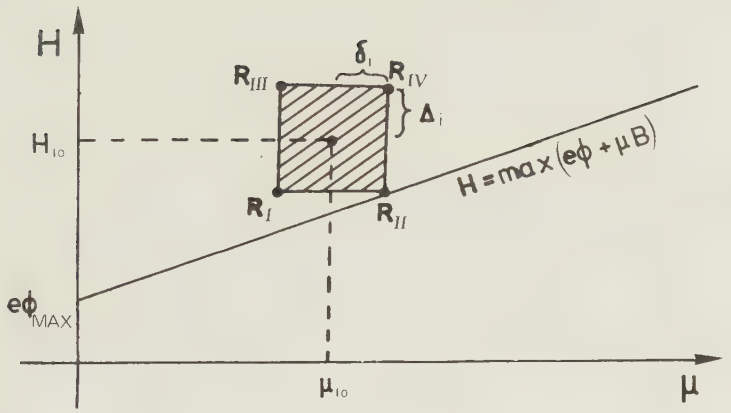


Abb. 2-5: Die Kurve H = max($e\phi + \mu B$) ist die Grenze für Reflexion, oberhalb derer die Integration von Gl. (2-27) durchgeführt werden soll.

$$H_{io} - \Delta_i - e\phi_o - (\mu_{io} - \delta_i) B_o \geq 0 \qquad (2\text{-}30)$$

Die dimensionslose Poisson-Gleichung läßt sich in diesem Fall schreiben

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{M\{\psi(\xi), \tilde{B}(\xi)\}}{M_1} - \eta \frac{N\{\psi(\xi), \tilde{B}(\xi)\}}{N_o} \qquad (2\text{-}31a)$$

wobei gilt:

$$M(\psi,\tilde{B}) = \left\{(1-\alpha_e)+\psi+\tilde{S}_{e1}\left[(1-\beta_e)-(1+\beta_e)\tilde{B}\right]\right\}^{3/2}$$
$$-\left\{(1-\alpha_e)+\psi+\tilde{S}_{e1}\left[(1-\beta_e)-(1-\beta_e)\tilde{B}\right]\right\}^{3/2}$$
$$-\left\{(1+\alpha_e)+\psi+\tilde{S}_{e1}\left[(1+\beta_e)-(1+\beta_e)\tilde{B}\right]\right\}^{3/2}$$
$$+\left\{(1+\alpha_e)+\psi+\tilde{S}_{e1}\left[(1+\beta_e)-(1-\beta_e)\tilde{B}\right]\right\}^{3/2} \qquad (2\text{-}31b)$$

$$N(\psi,\tilde{B}) = \left\{\tilde{P}_{io}(1-\alpha_i)+V-\psi+\tilde{S}_{io}\left[(1-\beta_i)-(1+\beta_i)\tilde{B}/b\right]\right\}^{3/2}$$
$$-\left\{\tilde{P}_{io}(1-\alpha_i)+V-\psi+\tilde{S}_{io}\left[(1-\beta_i)-(1-\beta_i)\tilde{B}/b\right]\right\}^{3/2}$$
$$-\left\{\tilde{P}_{io}(1+\alpha_i)+V-\psi+\tilde{S}_{io}\left[(1+\beta_i)-(1+\beta_i)\tilde{B}/b\right]\right\}^{3/2} \qquad (2\text{-}31c)$$
$$+\left\{\tilde{P}_{io}(1+\alpha_i)+V-\psi+\tilde{S}_{io}\left[(1+\beta_i)-(1-\beta_i)\tilde{B}/b\right]\right\}^{3/2}$$

$$M_1 = \left[(1-\alpha_e)-2\beta_e\tilde{S}_{e1}\right]^{3/2}-\left[1-\alpha_e\right]^{3/2}$$
$$-\left[1+\alpha_e\right]^{3/2}+\left[(1+\alpha_e)+2\beta_e\tilde{S}_{e1}\right]^{3/2} \qquad (2\text{-}31d)$$

$$N_0 = \left[\tilde{P}_{io}(1-\alpha_i)-2\beta_i\tilde{S}_{io}\right]-\left[\tilde{P}_{io}(1-\alpha_i)\right]^{3/2}$$
$$-\left[\tilde{P}_{io}(1+\alpha_i)\right]^{3/2}+\left[\tilde{P}_{io}(1+\alpha_i)+2\beta_i\tilde{S}_{io}\right]^{3/2} \qquad (2\text{-}31e)$$

In den Gl. (2-31) wurden die Definitionen von (2-23) benutzt. Ferner wurden die Halbwertsbreiten Δ und δ der Verteilungsfunktionen mit Hilfe von zwei Parametern α und β definiert:

$$\Delta_s = \alpha_s\tilde{P}_s+\beta_s\tilde{S}_s \qquad (2\text{-}32)$$

$$\delta_s = \beta_s\mu_s \qquad (2\text{-}33)$$

Jetzt beschreiben α und β die ungeordnete Bewegung. Entsprechend dem Fall ohne Temperatur liefert die Bedingung für

Quasi-Neutralität am Rand R_o und am Rand R_1 eine Beziehung zwischen allen Parametern, welche in Kapitel 2.5 ausführlich behandelt wird.

2.2 Qualitative Aussagen

Obwohl die Poisson-Gleichung (2-22) bzw. (2-31) sich nicht analytisch integrieren läßt, ist es möglich, aus ihr qualitative Aussagen zu gewinnen, bevor eine numerische Integration durchgeführt wird.

Hier wird im Detail der Fall behandelt, dem eine Deltafunktion als Verteilungsfunktion (2-15) entspricht. Die Berücksichtigung einer Verteilungsfunktion mit generalisierter Temperatur erlaubt eine ähnliche Analyse.

Die Gl. (2-22) läßt sich mit Hilfe einer Funktion $W(\psi,\xi)$ folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\frac{\partial W(\psi,\xi)}{\partial \psi} \qquad (2\text{-}34)$$

In dieser Schreibweise hat die Poisson-Gleichung die Form einer Bewegungsgleichung für ein fiktives Teilchen, das sich in einem eindimensionalen Raum ψ unter der Wirkung eines fiktiven Potentials W während der fiktiven Zeit ξ bewegt.

Parallel zur Bedeutung der Quasi-Neutralität bezüglich der Poisson-Gleichung (s. Gl. (2-24)) kann man hier bezüglich der durch Gl. (2-34) beschriebenen Bewegung des fiktiven

Teilchens sagen: Wenn für die charakteristische fiktive Zeit L

$$\frac{L}{\Lambda} >> 1 \qquad (2\text{-}35)$$

gilt, hat man aus Gl. (2-34)

$$\frac{\Lambda^2}{L^2} \approx \left| -\frac{\partial W(\psi, \xi)}{\partial \psi} \right| << 1 \qquad (2\text{-}36)$$

d.h., die Kraftwirkung auf das fiktive Teilchen ist vernachlässigbar, wenn man auch für den Bereich (R_o, R_1) Quasi-Neutralität annimmt.

Das quasi-neutrale ψ_{QN} wird nun aus der Bedingung (2-25) für $\psi = \psi_{QN}$ bestimmt. Bei Quasi-Neutralität ist damit die Potentialdifferenz $\Delta\psi$ zwischen zwei ausgewählten Randpunkten eindeutig festgelegt. Das ist nicht der Fall, wenn die Einschränkung der Quasi-Neutralität zwischen R_o und R_1 aufgehoben wird. Hier stellt sich die Frage, ob eine Lösung ψ existiert, die die Quasi-Neutralität verletzt und die eine höhere Potentialdifferenz $\Delta\psi$ zuläßt, wenn alle anderen Parameter gleich bleiben (siehe Kapitel 1-2).

Obwohl nur der Funktionsraum der Lösungen von Gl. (2-22) eine endgültige positive Antwort auf diese Frage liefern kann, kann man aus der Bewegung des fiktiven Teilchens einige qualitative Informationen über die Lösung und ihren Existenzraum gewinnen.

Das fiktive Potential W hängt sowohl von ψ als auch von der fiktiven Zeit ab, so daß man nicht mehr von der Erhaltung der Summe der fiktiven kinetischen und potentiellen Energie sprechen kann.

Das Potential $W(\psi, \xi)$ erhält man durch Integration der rechten Seite von Gl. (2-22)

$$W(\psi,\xi) = \int_{\psi_A}^{\psi} \left[\frac{\tilde{B}(\xi)}{\sqrt{1+\tilde{S}_{e1}+\psi-\tilde{S}_{e1}\tilde{B}(\xi)}} - \frac{\eta}{b}\frac{\tilde{B}(\xi)}{\sqrt{\tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}+V-\psi-\tilde{S}_{io}\tilde{B}/b}}\right] d\psi \qquad (2\text{-}37)$$

wobei ψ_A das Minimum von ψ ist. Mit

$$W(\psi_A, 0) = 0 \qquad (2\text{-}38)$$

erhält man

$$W(\psi,\xi) = -2\tilde{B}(\xi)\left\{\sqrt{1+\tilde{S}_{e1}+\psi-\tilde{S}_{e1}\tilde{B}(\xi)} - \frac{\eta}{b}\sqrt{\tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}+V-\psi-\tilde{S}_{io}\tilde{B}(\xi)/b}\right\} \qquad (2\text{-}39)$$

wobei

$$\psi(\xi=0) = V \qquad (2\text{-}40)$$

ist. Da $B(\xi = 0) = b$ ist, soll nun zur "Zeit" $\xi = 0$

$$1+\tilde{S}_{e1}(1-b) < \psi < \tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}\left(\frac{b-1}{b}\right)+V \qquad (2\text{-}41)$$

gelten, da W in (2-39) reell sein muß. Wenn ξ sich dem höchsten Wert, ξ_{MAX}, nähert, dann ist $B(\xi_{MAX}) = 1$ und ψ kann wer-

te annehmen, die durch folgende Ungleichung gegeben sind

$$-1 < \Psi < \tilde{P}_{io} + \tilde{S}_{io}\left(\frac{b-1}{b}\right) + V \qquad (2\text{-}42)$$

Die Abb. 2-6 zeigt den erlaubten Existenzraum für Ψ als schraffierte Fläche. Die untere Grenze von Ψ hängt im Gegensatz zu der oberen Grenze nicht von der frei wählbaren Randbedingung V ab. Für verschiedene Werte von V sind die daraus resultierenden Grenzen parallele Kurven.

Die Abb. 2-7 zeigt das fiktive Potential $W(\Psi)$ für verschiedene "Zeiten" ξ. Wenn V sich von $V_{QN} = \Psi_{QN}(\xi = 0)$ unterscheidet, bekommt das "Potential" W die Form eines Topfes. Für $\xi = 0$ hat $\tilde{B}(\xi)$ den höchsten Wert und zu dieser "Zeit" liegt die "Potentialkurve" bezüglich der ξ-Achse am tiefsten (Abb. 2-7). Im Laufe der "Zeit" ξ wird die "Potentialkurve" angehoben; gleichzeitig dehnt sie sich bis zu dem Grenzwert -1 am linken Rand bzw. $P_{io} + V + S_{io}(b - 1)/b$ am rechten Rand aus und wird viel flacher. Das "Potential" hat für alle Ψ und ξ die Eigenschaft

$$\frac{\partial^2 W(\Psi,\xi)}{\partial \Psi^2} < 0 \quad , \qquad (2\text{-}43)$$

was oszillatorische "Bewegungen" für das fiktive Teilchen erlaubt. Die genaue Form des Potentials W hängt von den verschiedenen Parametern, die die Quasi-Neutralitätsbedingungen erfüllen, ab.

Für einen anderen, größeren Wert von V, entsprechend einer größeren Abweichung von der Bedingung der Quasi-Neutralität

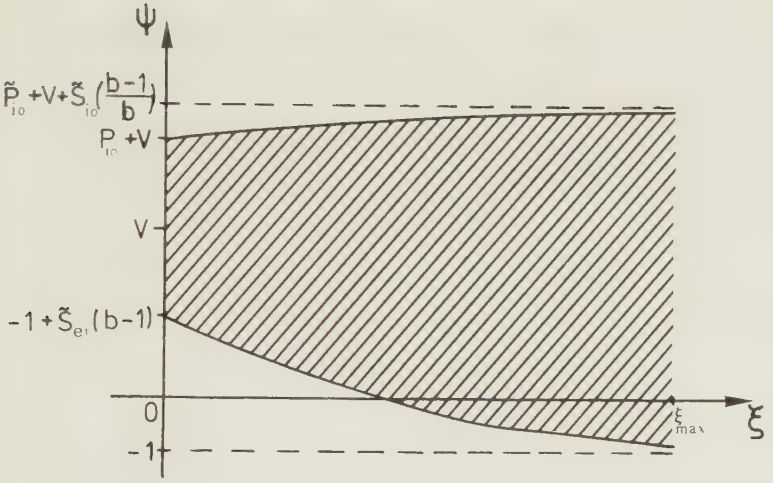


Abb. 2-6: Die schraffierte Fläche stellt den erlaubten Variationsraum für $\psi(\xi)$ dar.

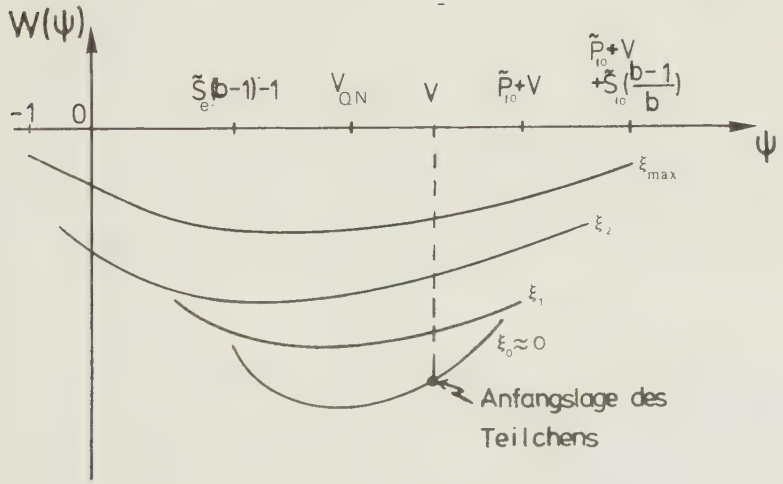


Abb. 2-7: Das "Potential" $W(\psi)$ für verschiedene Werte von ξ : $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_{MAX}$.

liegen die "Potentialtöpfe" für verschiedene ξ vergleichsweise tiefer und der rechte Rand erstreckt sich weiter nach rechts. Die Abb. 2-8 zeigt entsprechende"Potentialkurven" für zwei verschiedene Werte von $V(V_1 < V_2)$ für $\xi = 0$ und für $\xi = \xi_{MAX}$.

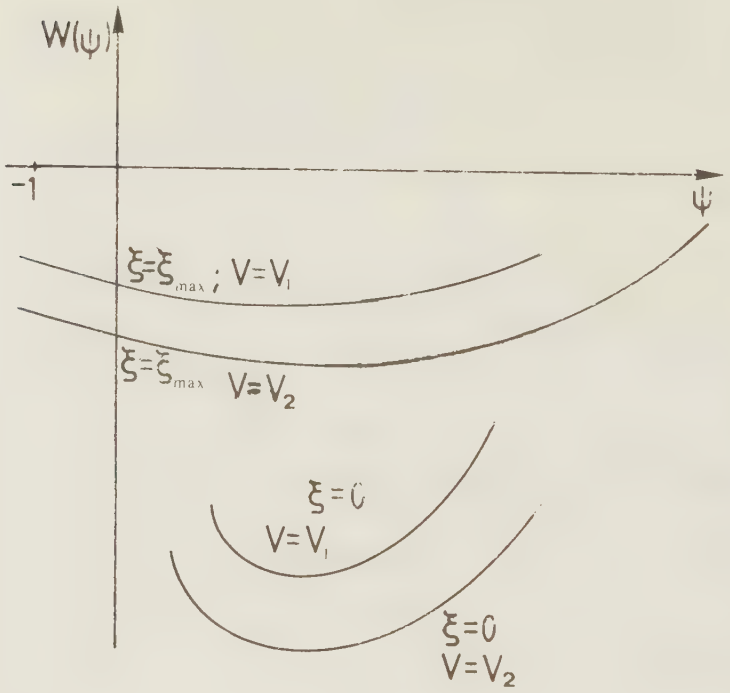


Abb. 2-8: Vergleich der Potentialformen für verschiedene Werte von V $(V_1 < V_2)$ am Anfang der Bewegung $\xi = 0$ und am Ende des "Zeitintervals" $\xi = \xi_{MAX}$.

Aus den Potentialformen der Abb. 2-7 kann man auf die Bewegung des fiktiven Teilchens schließen. Zur "Zeit" $\xi = 0$ befindet sich das "Teilchen" am Punkt $\psi = V$ des untersten "Potentialtopfs". Die Richtung der "Anfangsbewegung" hängt von der "Anfangsgeschwindigkeit" $d\psi/d\xi$ ab. Diese muß so ausgewählt werden, daß das Teilchen nicht "aus dem Topf springt". Wenn die Ränder nicht überschritten werden, oszilliert das "Teilchen" im "Potentialtopf".

Wenn man eine Randbedingung festlegt, z.B. daß sich das Teilchen für $\xi = \xi_{MAX}$ bei $\psi = 0$ befindet, wird die Vielzahl möglicher "Anfangsgeschwindigkeiten" stärker beschränkt. Als mögliche "Bewegungen" kann man (s. Abb. 2-7) dem "Teilchen" eine negative oder positive "Anfangsgeschwindigkeit" geben, so daß das "Teilchen" nach der "Zeit" ξ_{MAX} den Punkt $\psi = 0$ erreicht, entweder nach keiner oder mehreren Reflexionen am linken bzw. rechten Rand. Aus den verschiedenen "Potentialkurven" der Abb. 2-7 sieht man auch, daß sich der Mittelpunkt der "Schwingungsbewegung" in Richtung $\psi = 0$ verlagert.

Mit diesem Bild ist es möglich, die Lösungen ψ der Poisson-Gleichung (2-31) qualitativ zu diskutieren. Die fiktive Anfangsgeschwindigkeit $-d\psi/d\xi$ entspricht dem elektrischen Feld am Rand R_o. Eine Überschreitung des Topfrandes durch das "Teilchen" bedeutet eine Überschreitung der Grenze von ψ, die in der Abb. 2-6 den erlaubten Existenzraum einschränkt. Eine Überschreitung der oberen bzw. unteren Grenze entspricht

einer Reflexion der Ionen bzw. der Elektronen, was in dem hier behandelten Modell ausgeschlossen wurde. Bezüglich der Abb. 2-3 bedeutet die Reflexion, daß die dazu gehörende Lösung eine Kurve $H = \max(q_s\phi + \mu B)$ erzeugt, so daß der Punkt $(\bar{\mu}_s, \bar{H}_s)$ unterhalb der Kurve, d.h. in der verbotenen Region der Ebene (μ, H) liegt.

Der Fall mit konstantem Magnetfeld $\tilde{B}$ entspricht einem "Potential", das nicht von der "Zeit" ξ abhängt. Das fiktive Teilchen bewegt sich jetzt in einem "festen" Potential. Es gibt daher keine Verlagerung des Schwingungsmittelpunktes, und das "Teilchen" kann im "Potential" immer die Stelle $\psi = 0$ erreichen. Die Abb. 2-9 zeigt das fiktive "Potential" $W(\psi)$ für konstantes $\tilde{B}$.

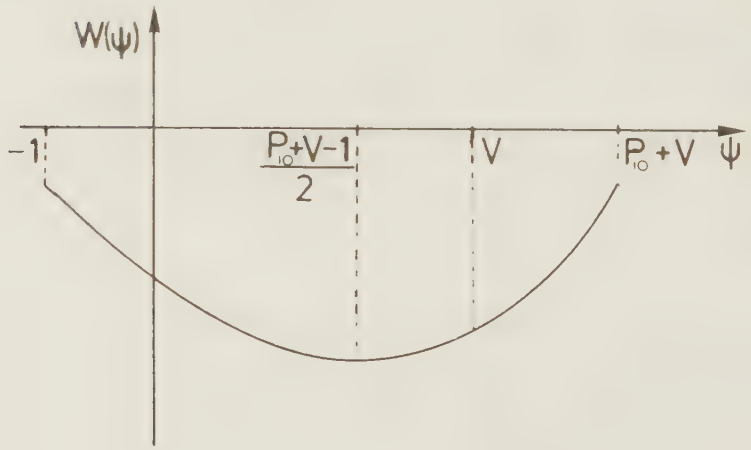


Abb. 2-9: Das "Potential" $W(\psi)$ für konstantes $\tilde{B}$.

Falls eine ungeordnete Bewegung in der Verteilungsfunktion berücksichtigt wird (s. Gl. (2-26)), hat das fiktive Potential $W(\psi,\xi)$ die gleichen Eigenschaften wie das "Potential" der Abb. 2-7 für den Fall ohne "Temperatur".

Das fiktive Potential wird jetzt durch

$$W(\psi,\xi) = -\int_{\psi_A}^{\psi} \left[\frac{M(\psi,\xi)}{M_1} - \eta \frac{N(\psi,\xi)}{N_o} \right] d\psi \qquad (2\text{-}44)$$

bestimmt, wobei $M(\psi,\xi)$, $N(\psi,\xi)$, M_1 und N_o durch Gl. (2-31b)-(2-31e) definiert werden.

Mit der Bedingung, daß $M(\psi,\xi)$ und $N(\psi,\xi)$ reell sein sollen, erhält man den erlaubten Variationsraum für ψ, welcher in der Abb. 2-10 gezeigt wird.

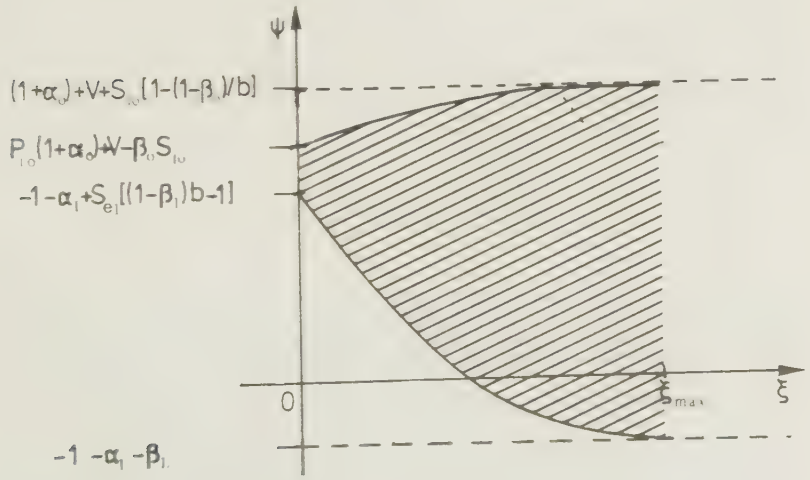


Abb. 2-10: Variationsraum für ψ mit $\nabla B \neq 0$ und mit Temperatur .

Wegen der Ähnlichkeit mit dem Fall ohne Temperatur kann man erwarten, daß die Einführung einer kleinen Temperatur in die Verteilungsfunktion die Existenz von oszillierenden Lösungen der Poisson-Gleichung zwar begrenzt, jedoch nicht beseitigt.

2.3 Adiabatische Invariante für kleine dB/dx

Im Kapitel 2.2 konnte man sehen, daß für konstantes Magnetfeld das fiktive Potential W unabhängig von der fiktiven Zeitkoordinate ξ ist. Die Bewegung des fiktiven Teilchens in diesem "Potentialtopf" ist periodisch. Wenn man dagegen eine schwache ξ-Abhängigkeit des Magnetfeldes zuläßt, hängt das"Potential" von der "Zeit" ξ ab. Es ist daher von Interesse, das Verhalten der Lösung der Poisson-Gleichung bzw. der Bewegungsgleichung des fiktiven Teilchens unter der Annahme einer schwachen ξ-Abhängigkeit von $\tilde{B}$ zu untersuchen. Schwach bedeutet hier, wie in Kapitel 2.1, daß für den Gyrationsradius ρ gilt:

$$\rho \ll \Delta \ll L$$

Wie in Kapitel 2.2 diskutiert wurde, entspricht die Lösung der Poisson-Gleichung der Schwingungsbewegung eines fiktiven Teilchens in einem Potentialtopf, der sich mit der "Zeit" ändert. Man betrachtet die periodische Bewegung des fiktiven Teilchens und "friert" die explizite Zeitabhängigkeit ein (Ehrenfest, 1916). Die Hamilton'sche Funktion für

das fiktive Teilchen ist nun

$$\hat{H}(p, \psi, \tilde{B}(\xi)) = \frac{p^2}{2} + W(\psi, \tilde{B}(\xi)) \qquad (2\text{-}49)$$

wobei $\tilde{B}(\xi)$ ein Parameter und $p = d\psi/d\xi$ ist. Für das "eingefrorene" Problem ist $\hat{H}$ eine Konstante der Bewegung und im Phasenraum beschreibt die Lösung der Bewegungsgleichung für die periodische Bewegung des "Teilchens" eine geschlossene Kurve (s. Abb. 2-11), wobei ψ der generalisierten Koordinate q entspricht.

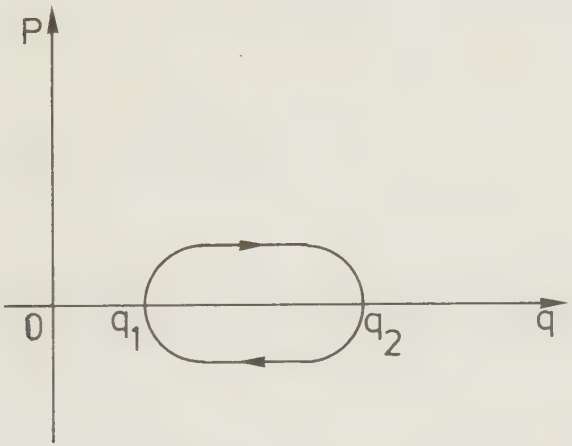


Abb. 2-11: Lösung der Bewegungsgleichung des fiktiven Teilchens im Phasenraum für konstantes Magnetfeld ("eingefrorenes" Problem).

Der eingeschlossene Flächeninhalt J der Lösungskurve

$$J = \oint p\, dq \qquad (2\text{-}50)$$

ist eine adiabatische Invariante der Bewegung (ter Haar, 1971; S. 142). Der Begriff adiabatische Invariante soll im folgenden erklärt werden. Während eines Zeitraums T wird der Parameter $\tilde{B}$ variiert

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0 + \delta\tilde{B} \tag{2-51}$$

Wenn die zeitliche Änderung von $\tilde{B}$ langsam ist, d.h.

$$\frac{\delta\tilde{B}}{T} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1$$

dann folgt, weil J adiabatische Invariante ist:

$$\frac{J(T) - J(0)}{T} = O(\varepsilon^2),$$

Auch wenn $T = O(1/\varepsilon)$ ist, bleibt $J(T) - J(0) = \Theta(\varepsilon)$. Das Integral (2-50) kann man für das hier behandelte Problem schreiben als

$$J = 2^{3/2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{\hat{H} + 2\tilde{B}(\vartheta)\left[\sqrt{1 + \tilde{S}_{e1} + \psi - \tilde{S}_{e1}\tilde{B}(\vartheta)} + \frac{\eta}{b}\sqrt{P_{i0} + S_{i0} + V - \psi - \frac{S_{i0}}{b}\tilde{B}(\vartheta)}\right]}\, d\psi \tag{2-52}$$

wobei ψ_1 und ψ_2 zwei Nullstellen des Radikanden sind, zwischen denen er positiv ist. Die Kurve ist zur q-Achse symmetrisch und die Grenzen ψ_1, ψ_2 hängen von $\hat{H}$ ab. Verschiedene Werte von $\hat{H}$ entsprechen einer Schar von ineinander liegenden Kurven, die sich nicht kreuzen (Born, 1925; S. 54).

Nun erhält man aus Gl. (2-52) die Variation von $\hat{H}$ in Abhängigkeit von $\tilde{B}$ als

$$\frac{d\hat{H}}{d\tilde{B}} = \frac{-\partial J/\partial \tilde{B}|_H}{\partial J/\partial \hat{H}|_B} = \frac{I_1}{I_2} \tag{2-53a}$$

wobei gilt

$$I_1 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{-\left[\frac{2F - \tilde{B}\tilde{S}_{e1}}{\sqrt{F}} + \frac{\eta}{b}\left(\frac{2G - \tilde{B}\tilde{S}_{i0}/b}{\sqrt{G}}\right)\right]}{\sqrt{\hat{H} + 2\tilde{B}\left(\sqrt{F} + \frac{\eta}{b}\sqrt{G}\right)}}\, d\psi \tag{2-53b}$$

$$I_2 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\sqrt{\hat{H} + 2\tilde{B}\left(\sqrt{F} + \frac{\eta}{b}\sqrt{G}\right)}} \tag{2-53c}$$

$$F = 1 + \tilde{S}_{e1} + \psi - \tilde{S}_{e1}\tilde{B} \tag{2-53d}$$

$$G = \tilde{P}_{i0} + \tilde{S}_{i0} + V - \psi - \tilde{S}_{i0}\tilde{B}/b \tag{2-53e}$$

Da I_2 positiv ist, bestimmt I_1 das Vorzeichen von $d\hat{H}/d\tilde{B}$. $\hat{H}$ stellt in diesem Bild die gesamte Energie der Bewegung des fiktiven Teilchens dar, und $\tilde{B}$ ist eine monoton fallende Funktion der "Zeit" ξ. So bestimmt das Vorzeichen von $d\hat{H}/d\tilde{B}$ das Verhalten der Amplitude der Bewegung im Laufe der Zeit. Aus dem Zähler von I_1 definieren wir

$$Z = -\left[\frac{2F - \tilde{B}\tilde{S}_{e1}}{\sqrt{F}} + \frac{\eta}{b}\left(\frac{2G - \tilde{B}\tilde{S}_{i0}/b}{\sqrt{G}}\right)\right]$$

Die Information über das Verhalten der Amplitude liefert auch (2-54), falls Z einheitliches Vorzeichen besitzt.

Z läßt sich schreiben als

$$Z = -\left\{ \frac{2(1+\tilde{S}_{e1}+\psi - \frac{3}{2}\tilde{S}_{e1}\tilde{B})}{\sqrt{1+\tilde{S}_{e1}+\psi-\tilde{S}_{e1}B}} + \frac{\eta}{b}\left[\frac{2(\tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}+V-\psi-\frac{3}{2}\tilde{S}_{io}\tilde{B}/b)}{\sqrt{\tilde{P}_{io}+\tilde{S}_{io}+V-\psi-\tilde{S}_{io}\tilde{B}/b}}\right]\right\} \tag{2-54}$$

Eine hinreichende Bedingung für $Z < 0$ ist:

$$\psi > -1 - \tilde{S}_{e1} + \frac{3}{2}\tilde{S}_{e1}\tilde{B} \tag{2-55}$$

$$\psi < \tilde{P}_{io} + \tilde{S}_{io} + V - \frac{3}{2}\tilde{S}_{io}\tilde{B}/b \tag{2-56}$$

Die Bedingungen (2-55) und (2-56) setzen neue Grenzen für die Variation von ψ. Wie wir in Kapitel 2.2 gesehen haben, hängt der maximale bzw. minimale Wert von ψ von der Anfangsbedingung $\psi'(\xi = 0)$ ab. Alle Lösungen, die die Bedingungen (2-55) und (2-56) erfüllen, haben $Z < 0$. Für sie gilt

$$\frac{d\hat{H}}{d\xi} = \frac{d\hat{H}}{d\tilde{B}}\frac{d\tilde{B}}{d\xi} > 0 \tag{2-57}$$

weil für das hier benutzte Magnetfeld $d\tilde{B}/d\xi < 0$ ist. Für die oben genannten Lösungen nimmt die Amplitude der Bewegung des fiktiven Teilchens zu. Aus diesem Resultat können wir schließen, daß unter den Bedingungen (2-55) und (2-56) die Amplitude des elektrischen Potentials ψ aus der Lösung der Poisson-Gleichung (2-22) mit ξ zunimmt.

2.4 Erweiterung der BGK-Theorie für B ≠ 0

Da die Gl. (2-22) sich i.a. analytisch nicht integrieren läßt, betrachten wir in diesem Kapitel einige spezielle Fälle, bei denen eine analytische Lösung möglich ist. Diese Fälle machen es möglich, die Rolle des Magnetfeldes besser zu verstehen.

Um das zu erreichen, werden wir zunächst die Integration von Gl.(2-22) nach der Theorie von Bernstein, Greene und Kruskal (1957) für B = 0 durchführen. Danach werden wir die Theorie erweitern, um ein nicht konstantes Magnetfeld zu berücksichtigen.

2.4.1 Die BGK-Theorie für B = 0

Berstein, Greene und Kruskal (1957) studierten die stationären Lösungen des gekoppelten Boltzmann-Poisson-Gleichungssystems (Gl. (2-1) und Gl. (2-2)) für ein eindimensionales stoßfreies Plasma ohne Magnetfeld:

$$v \frac{\partial f_s(x,v)}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \frac{\partial f_s(x,v)}{\partial v} = 0 \qquad (2\text{-}57)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, f_e(x,v) - 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, f_i(x,v) \qquad (2\text{-}58)$$

Da alle Verteilungsfunktionen der Form

$$f_s(x,v) = f_s\left(E = \tfrac{1}{2} m_s v^2 + q_s \phi\right) \tag{2-59}$$

Lösungen der Gl. (2-57) sind, muß nur noch Gl. (2-58) betrachtet werden. Die Gl. (2-58) läßt sich schreiben

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e \int_{-e\phi}^{\infty} \frac{f_e(E)\,dE}{\sqrt{2\,m_e(E+e\phi)}} - 4\pi e \int_{e\phi}^{\infty} \frac{f_i(E)dE}{\sqrt{2m_i(E-e\phi)}} \tag{2-60}$$

Wenn der Teilcheneinfang ausgeschlossen wird, kann Gl. (2-60) für eine Verteilungsfunktion der Form

$$f_s \sim \delta\left(v^2 + \frac{2q_s\phi}{m_s} - V_{os}^2\right) \tag{2-61}$$

unter der Bedingung

$$V_{os} >> \left|\frac{2e\phi_{MAX}}{m_s}\right|$$

linear in ϕ geschrieben werden, mit der Lösung (Krall und Trivelpiece, 1973: S. 432)

$$\phi = \phi_{max} \sin \lambda^{-1} x \tag{2-62a}$$

wobei

$$\lambda = (4\pi \bar{n}_o e^2)^{-1/2} \left(\frac{1}{m_i V_{oi}^2} + \frac{1}{m_e V_{oe}^2}\right)^{-1/2} \tag{2-62b}$$

mit $\bar{n}_o = \bar{n}_i = \bar{n}_e$ eine generalisierte Debye-Länge ist.

Wenn auch der Einfluß von gefangenen Teilchen mit berücksichtigt wird, gibt es zahlreiche verschiedene Lösungen ϕ. Für ein bestimmtes vorgegebenes Potential $\phi(x)$ kann man aus

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -N(e\phi)$$

die notwendige Ladungsdichte $N(e\phi)$ berechnen. Wenn man außer dem Potential ϕ noch die Verteilungsfunktion für die Ionen f_i und z.B. für die nicht eingeschlossenen Elektronen f_e^F kennt, erhält man für die Ladungsdichte der eingeschlossenen Teilchen

$$\rho_e^E = \int_{e\phi}^{\infty} \frac{dE\, f_i(E)}{\sqrt{2m_i(E-e\phi)}} - \int_{-e\phi_{min}}^{\infty} \frac{dE\, f_e^F}{\sqrt{2m_e(E+e\phi)}} - \frac{N(e\phi)}{4\pi e} \qquad (2\text{-}63)$$

Wir definieren

$$g(e\phi) := \rho_e^E \quad ; \qquad g(e\phi) = \int_{-e\phi}^{-e\phi_{MIN}} \frac{f_e^E(E)\,dE}{\sqrt{2m_e(E+e\phi)}} \qquad (2\text{-}64)$$

Gl. (2-64) ist eine Abel'sche Integralgleichung für $f_e^E(E)$. Die Lösung ist

$$f_e^E(E) = \frac{\sqrt{2m_e}}{\pi} \int_{e\phi_{MIN}}^{-E} \frac{dw}{\sqrt{-E-w}} \frac{dg(w)}{dw} \qquad (2\text{-}65)$$

Falls das Potential $\phi(x)$, die gesamte Verteilungsfunktion $f_i(E)$ für die Ionen und die Verteilungsfunktion für die freien Elektronen vorgegeben sind, liefert Gl. (2-65) die gesuchte Verteilungsfunktion für die eingeschlossenen Elektronen an der Stelle X.

Die Methode hat Bedeutung, weil sie einen Überblick über die möglichen Lösungen gibt. In der Praxis läßt sich diese Methode jedoch häufig nicht erfolgreich anwenden, weil man nur a posteriori testen kann, ob die Verteilungsfunktion $f_e^E(E)$ positiv ist. Dieses Problem kann zum wiederholten Mißerfolg führen und die Zahl von Versuchen unvorhersehbar groß machen (s. Kritik von Schamel, 1974).

2.4.2 Der Fall $\nabla B \neq 0$ ohne eingeschlossene Teilchen

In diesem und im nächsten Abschnitt wollen wir die Theorie der elektrostatischen Strukturen auf den Fall $B \neq 0$ bzw. $\nabla B \neq 0$ verallgemeinern. In diesem Abschnitt geben wir die Verteilungsfunktionen als δ-Funktionen vor und berechnen das Potential.

Jetzt kann man statt Gl. (2-60) die im Kapitel 2.1 bereits erwähnte Poisson-Gleichung (2-19) zusammen mit Gl. (2-20) und Gl. (2-21) benutzen:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e \left\{ \frac{B_1}{B_0} \frac{n_{i0}\sqrt{P_{i0}}}{\sqrt{\bar{H}_i - e\phi - \bar{\mu}_i B}} - \frac{n_{e1}\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{\bar{H}_e + e\phi - \bar{\mu}_e B}} \right\} \frac{B}{B_1} \qquad (2\text{-}66)$$

Bei konstantem Magnetfeld $B = B_0 = B_1$ erhält man aus Gl. (2-66) mit den Definitionen (2-20) und (2-21) die Gleichung der BGK-Theorie

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e \left\{ \frac{n_{i0}\sqrt{P_{i0}}}{\sqrt{P_{i0} - e\phi}} - \frac{n_{e1}\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{P_{e1} + e\phi}} \right\} \qquad (2\text{-}66a)$$

Damit ist der Fall B = const. bereits in der Theorie ohne Magnetfeld (s. Gl. (2-60)) enthalten. Anders verhält es sich im Fall $\nabla B \neq 0$.

Wegen der Nichtlinearität ist diese Gleichung i.a. nicht analytisch lösbar. Wir betrachten im folgenden den Spezialfall, daß die kinetische Energie viel größer als die potentielle Energie ist.

$$\bar{H}_i \gg |e\phi + \mu_i B| \tag{2-67a}$$

$$\bar{H}_e \gg |-e\phi + \mu_e B| \tag{2-67b}$$

Bei dieser Näherung muß noch beachtet werden, daß die Bedingungen für die adiabatische Näherung gelten. Daraus folgt

$$1 \ll \frac{P_s}{S_s} \ll \left(\frac{\ell}{\rho}\right)^2 \tag{2-68}$$

In dieser Näherung kann man mit der Entwicklung

$$\left[1 - \left(\frac{q_s\phi + \bar{\mu}_s B}{\bar{H}_s}\right)\right]^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,\frac{q_s\phi + \mu_s B}{\bar{H}_s}$$

die Gleichung (2-66) schreiben als lineare Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e \Bigg\{ &\left(\frac{B_1}{B_0}\, n_{i0}\,\frac{\sqrt{P_{i0}}}{\sqrt{\bar{H}_i}} - n_{e1}\frac{\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{\bar{H}_e}}\right)\frac{B(x)}{B_1} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{B_0}\,\frac{n_{i0}\bar{\mu}_i\sqrt{P_{i0}}}{\bar{H}_i^{3/2}} - \frac{n_{e1}\bar{\mu}_e\sqrt{P_{e1}}}{\bar{H}_e^{3/2}}\right)\frac{B^2(x)}{B_1} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{B_0}\,\frac{n_{i0}}{\bar{H}_i^{3/2}}\sqrt{P_{i0}} + \frac{n_{e1}\sqrt{P_{e1}}}{\bar{H}_e^{3/2}}\right) e\,\frac{B(x)}{B_1}\,\phi(x)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2-69}$$

Mit der Einschränkung, daß

$$\frac{B_1}{B_o}\,\frac{n_{io}}{n_{e1}}\,\frac{\sqrt{P_{io}}}{\sqrt{P_{e1}}}\,\frac{\bar{H}_e^{3/2}}{\bar{H}_i^{3/2}}\,\frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\mu}_e} = 1 \qquad (2\text{-}70)$$

fällt der Term mit B^2 weg. Mit der Annahme, daß die Parameter in (2-70) die Bedingung für Quasi-Neutralität (2-104) und (2-105) and den Rändern erfüllen, läßt sich (2-70) schreiben als

$$\frac{\tan(\theta_{e1})}{\tan(\theta_{i1})}\,\frac{\left[1+\frac{3}{2}\left(s_{e1}-e\phi_1\right)/P_{e1}\right]}{\left[1+\frac{3}{2}\left(s_{i1}+e\phi_1\right)/P_{i1}\right]} = 1 \qquad (2\text{-}71a)$$

wobei

$$\theta_{s1} = \arctan\frac{V_{\perp s1}}{V_{\parallel s1}} \qquad (2\text{-}71b)$$

der Pitch-Winkel der Teilchensorte s am Rand R_1 ist. Eine entsprechende Beziehung läßt sich auch für den Rand R_o schreiben. Wegen der Bedingung (2-68) bedeutet (2-70), daß beide Teilchensorten fast den gleichen Pitch-Winkel haben müssen.

Die Gl. (2-69) läßt sich nun dimensionslos als homogene Gleichung schreiben:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{B(\xi)}{B_1}\,\psi(\xi) = 0 \qquad (2\text{-}72a)$$

wobei

$$\gamma(\xi) = \frac{\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{\bar{H}_e}} \left[\left(\frac{\bar{\mu}_e \bar{H}_e}{\bar{\mu}_i \bar{H}_i} - 1 \right) + \left(\frac{\bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_i} + 1 \right) \frac{e\phi(\xi)}{2\bar{H}_e} \right] \qquad (2\text{-}72b)$$

$$\xi = x/\lambda \qquad (2\text{-}72c)$$

$$\lambda^2 = \frac{2\bar{H}_e^{3/2}}{\sqrt{P_{e1}}} \left(\frac{\bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_i} + 1 \right)^{-1} \Big/ (4\pi e^2 n_{e1}) \qquad (2\text{-}72d)$$

Die Gl. (2-72d) definiert eine generalisierte Debye-Länge. Im folgenden betrachten wir zwei Möglichkeiten für die Darstellung des relativen Feldes $B(\xi)/B_1$.

Fall A: Dipol-Feld

Wenn man für $B(\xi)$ das Feld eines Magnetdipols annimmt, gilt im Bereich der Polachse (s. Kapitel 2.5)

$$\frac{B(\xi)}{B_1} = \frac{(r_0 + d)^3}{(r_0 + \xi)^3} \qquad (2\text{-}73)$$

wobei d der Abstand zwischen den Rändern R_0 und R_1 ist.

Mit

$$a := (r_0 + d)^3$$

resultiert für (2-72a)

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + a(r_0 + \xi)^{-3}\psi = 0 \qquad (2\text{-}74)$$

Nach einer Variablentransformation

$$y = r_0 + \xi \qquad (2\text{-}75)$$

schreibt sich Gl. (2-74)

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + a y^{-3}\psi(y) = 0 \qquad (2\text{-}76)$$

Eine Lösung von (2-76) ist (z.B. Kamke, 1943)

$$\psi(y) = \sqrt{y}\; Z_{-1}\left(-2\sqrt{a/y}\right) \qquad (2\text{-}77)$$

wobei Z_ν die Zylinderfunktion

$$Z_\nu(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 Y_\nu(z) \qquad (2\text{-}78)$$

ist mit beliebigen Konstanten C_1, C_2. J_ν bzw. Y_ν sind die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art. Da für ganze Zahlen n gilt

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$$

können wir (2-77) schreiben als

$$\psi(y) = \sqrt{y}\left[c_1 J_1\left(2\sqrt{a/y}\right) + c_2' Y_1\left(2\sqrt{a/y}\right)\right] \qquad (2\text{-}79)$$

Diese Lösung hat ein oszillatorisches Verhalten, dessen Amplitude und charakteristische Länge vom Magnetfeld beeinflußt werden. Um diesen Einfluß näher zu untersuchen, betrachten wir den nächsten Fall.

Fall B: Lineare Abhängigkeit für $B(\xi)/B_1$

Angenommen, die schwache räumlich Abhängigkeit des Magnetfeldes sei im Sinne einer lokalen Linearisierung gegeben durch

$$B(\xi) = B_0(1-\alpha\xi) \tag{2-81}$$

mit $0 \leq \alpha << 1$. Mit Hilfe der Definitionen (2-23d) und (2-23g) kann man die Gl. (2-72a) schreiben als

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + b(1-\alpha\xi)\psi(\xi) = 0 \tag{2-82}$$

Nach einer Variablentransformation

$$w = b(1-\alpha\xi) \tag{2-83}$$

schreibt sich Gl. (2-82) für $\alpha \neq 0$

$$\frac{d^2\psi}{dw^2} + \frac{w}{\alpha^2 b^2}\psi = 0 \tag{2-84}$$

deren Lösung lautet

$$\psi(w) = \sqrt{w}\, Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}\frac{w^{3/2}}{\alpha b}\right) \tag{2-85}$$

Da

$$Y_{-1/3}(z) = -\frac{1}{3} J_{-1/3}(z) + \frac{2}{\sqrt{3}} J_{1/3}(z)$$

können wir die Lösung (2-85) schreiben als

$$\psi(w) = \sqrt{w}\left\{c_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3\alpha b} w^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\frac{2}{3\alpha b} w^{3/2}\right)\right\} \tag{2-86}$$

Wegen der Bedingung $\alpha << 1$ gilt für den hier behandelten Fall

$$\frac{2}{3\alpha b} w^{3/2} >> 1 \qquad (2\text{-}87)$$

da w und b von der Größenordnung 1 sind. Unter der Bedingung (2-87) läßt sich eine asymptotische Entwicklung für die Bessel'sche Funktion anwenden (Abramowitz und Stegun, 1972)

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P(\nu,z)\cos\chi - Q(\nu,z)\sin\chi \right\} \qquad (2\text{-}88a)$$

wobei

$$P(\nu,z) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!\,(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!\,(8z)^4} - \cdots \qquad (2\text{-}88b)$$

$$Q(\nu,z) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} = \frac{\mu-1}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!\,(8z)^3} + \cdots \qquad (2\text{-}88c)$$

$$\chi = z - \left(\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{4}\right)\pi \qquad (2\text{-}88d)$$

$$\mu = 4\nu^2 \qquad (2\text{-}88e)$$

Für das hier behandelte Beispiel ist $\mu = 4/9$, und $J_{1/3}(z)$ und $J_{-1/3}(z)$ schreiben sich

$$J_{1/3}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{5}{27z}\sin\left(z - \frac{5\pi}{12}\right) - \cdots \right\} \qquad (2\text{-}89)$$

$$J_{-1/3}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{5}{72 z} \sin\left(z - \frac{\pi}{12}\right) - \cdots \right\} \qquad (2\text{-}90)$$

Wenn wir nur den ersten Term der obigen Entwicklung (2-89) und (2-90) betrachten, schreibt sich die Lösung (2-86) nach Rücktransformation

$$\psi(\xi) \simeq \left[b(1-\alpha\xi)\right]^{-1/4} \sqrt{\frac{3\alpha b}{\pi}} \left\{ C_1 \cos\left(\frac{2}{3\alpha b} \left[b(1-\alpha\xi)\right]^{3/2} - \frac{5\pi}{12} \right) + C_2 \cos\left(\frac{2}{3\alpha b} \left[b(1-\alpha\xi)\right]^{3/2} - \frac{\pi}{12} \right) \right\} \qquad (2\text{-}91)$$

Mit Hilfe der Näherung

$$\left[b(1-\alpha\xi)\right]^{\gamma} \simeq b^{\gamma}(1-\gamma\alpha\xi) \qquad (2\text{-}92)$$

und der Rücktransformation (2-72c) läßt sich das Resultat (2-91) schreiben

$$\psi(x) \simeq \left(1 + \frac{\alpha\lambda^{-1}}{4} x\right) \left\{ A_1 \cos\left(\sqrt{b}\,\lambda^{-1} x + \vartheta_1\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{b}\,\lambda^{-1} x + \vartheta_2\right) \right\} \qquad (2\text{-}93a)$$

wobei

$$A_1 = C_1 \sqrt{\frac{3\alpha\sqrt{b}}{\pi}} \qquad (2\text{-}93b)$$

$$A_2 = C_2 \sqrt{\frac{3\alpha\sqrt{b}}{\pi}} \qquad (2\text{-}93c)$$

$$\vartheta_1 = \frac{5\pi}{12} - \frac{2\sqrt{b}}{3\alpha} \qquad (2\text{-}93d)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{2\sqrt{b}}{3\alpha} \qquad (2\text{-}93e)$$

Der Einfluß des Magnetfeldes auf das elektrische Potential läßt sich aus dem Resultat (2-93) ablesen. Im Vergleich zu einer rein oszillatorischen Struktur des Potentials im Fall ohne Gradient von B (Gl. 2-62) zeigt sich der Einfluß des Magnetfeldes hauptsächlich an zwei Effekten:

a) Die Wellenlänge des Potentials wird um einen Faktor $\sqrt{B_o/B_1}$ verkleinert.

b) Die Amplitude der oszillatorischen Struktur des elektrischen Potentials wird von der x-Koordinate abghängig.

Innerhalb der hier betrachteten Näherung ist die relative Zunahme der Amplitude proportional zu der relativen Abnahme des Magnetfeldes längs der x-Koordinate.

2.4.3 Der Fall $\nabla B \neq 0$ mit eingeschlossenen Teilchen

Wie im Abschnitt 2.4.a kann man jetzt für $\nabla B \neq 0$ auch eingeschlossene Teilchen berücksichtigen. Für ein vorgegebenes Magnetfeld gilt die Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e B(x)\left\{\frac{1}{\sqrt{2m_i}}\left[\int_{\mu=0}^{\infty}\int_{\max(e\phi+\mu B)}^{\infty}\frac{f_i^F(H,\mu)\,d\mu\,dH}{\sqrt{H-e\phi-\mu B}}\right.\right.$$

$$\left. + \int_{\mu=0}^{\infty}\int_{e\phi+\mu B}^{\max(e\phi+\mu B)}\frac{f_i^E(H,\mu)\,d\mu\,dH}{\sqrt{H-e\phi-\mu B}}\right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2m_e}}\left[\int_{\mu=0}^{\infty}\int_{\max(-e\phi+\mu B)}^{\infty}\frac{f_e^F(H,\mu)\,d\mu\,dH}{\sqrt{H+e\phi-\mu B}}\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\mu=0}^{\infty}\int_{-(e\phi+\mu B)}^{\max(-e\phi+\mu B)}\frac{f_e^E(H,\mu)\,d\mu\,dH}{\sqrt{H+e\phi-\mu B}}\right]\right\} \qquad (2\text{-}94)$$

f_s^E und f_s^F stehen für die Verteilungsfunktionen der eingeschlossenen bzw. freien Teilchen. Wir verallgemeinern das Verfahren von Bernstein, Green und Kruskal und betrachten dazu den Fall, daß das elektrische Potential $\phi(x)$, das Magnetfeld $B(x)$, die Verteilungsfunktion der Ionen und die Verteilungsfunktion der freien Elektronen vorgegeben werden. Man bestimmt daraus die Verteilungsfunktion für die eingeschlossenen Elektronen. Es gilt:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -M(\phi,B) \qquad (2\text{-}95)$$

mit der Teilchendichte für die eingeschlossenen Ionen:

$$n_e^E(\phi,B) = -\frac{M(\phi,B)}{4\pi e} + n_i^E(\phi,B) + n_i^F(\phi,B) - n_e^F(\phi,B) \qquad (2\text{-}96)$$

Die Verteilungsfunktion für die eingeschlossenen Elektronen ist die Lösung der Integralgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2m_e}}\int_{\mu=0}^{\infty}\int_{-e\phi+\mu B}^{\max(-e\phi+\mu B)}\frac{f_e^E(H,\mu)\,d\mu\,dH}{\sqrt{H+e\phi-\mu B}} = n_e^E(\phi,B) \qquad (2\text{-}97)$$

Wir betrachten für die weitere Diskussion eine Verteilungsfunktion

$$f_e(H,\mu) = F_e(H)\, g_e(\mu)$$

mit

$$g_e(\mu) \sim \delta(\mu-\bar{\mu})$$

so daß man die Integration bezüglich μ durchführen kann. Es ergibt sich:

$$\frac{B}{\sqrt{2m_e}} \int_{-e\phi+\bar{\mu}B}^{\max(-e\phi+\bar{\mu}B)} \frac{F_e(H)\,dH}{\sqrt{H+e\phi-\mu B}} = n_e^E(\phi,B) \qquad (2\text{-}98)$$

Aus Gl. (2-94) folgt, daß die rechte Seite von (2-98) die Form haben muß

$$n_e^E(\phi,B) = B\, g(e\phi-\mu B)$$

und die Integralgleichung wird

$$\frac{1}{\sqrt{2m_e}} \int_{\gamma}^{\gamma_{max}} \frac{F(H)\,dH}{\sqrt{H-\gamma}} = g(-\gamma) \qquad (2\text{-}99)$$

für $\gamma = -e\phi + \mu B$, mit der Lösung

$$F(H) = \frac{\sqrt{2m_e}}{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{-H} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma-H}} \frac{dg(\gamma)}{d\gamma} \qquad (2\text{-}100)$$

wobei γ_{max} der höchste Wert der Potentialenergie $-e\phi+\mu B$ der eingeschlossenen Elektronen ist. Falls B = 0 ist, wird $\gamma_{max} = -e\phi_{min}$.

Damit haben wir wenigstens für den hier betrachteten Sonderfall eines scharfen μ-Wertes das Verfahren nach BKG auf den Fall $\nabla B(x) \neq 0$ erweitert.

Mit Hilfe von (2-100) kann man mit der Vorgabe des elektrischen Potentials und der Verteilungsfunktion für die eingeschlossenen und freien Ionen sowie für die freien Elektronen die Verteilungsfunktion für die eingeschlossenen Elektronen bestimmen. Das gilt allerdings nur für den Fall, daß die ungeordnete Bewegung der Elektronen bezüglich der Gyration um das Magnetfeld vernachlässigt wird. Im allgemeinen Fall muß die Integralgleichung (2-97) aber numerisch gelöst werden.

2.5 Die Parameter für Quasi-Neutralität. Explizite Form des Magnetfeldes

2.5.1 Beziehung zwischen den Parametern

Wir haben für das im Kapitel 2.1 beschriebene Modell angenommen, daß die vorgegebenen Parameter mit Ausnahme der Potentialdifferenz die Randbedingung für Quasi-Neutralität erfüllen. Der Grund für diese Annahme ist, daß als Resultat einer äußeren Wirkung mit einer Zeitkonstanten kleiner als die Stromrelaxationszeit nur die Potentialdifferenz verändert wird (s. Kapitel 1-2).

Der Fall ohne Temperatur in der Verteilungsfunktion liefert für die Ionen- bzw. Elektronendichte aus Gl. (2-16) mit Berücksichtigung von (2-18):

$$n_i(x) = n_{io} \frac{B(x)}{B_o} \frac{\sqrt{P_{io}}}{\sqrt{P_{io} + S_{io} + e(\phi_o - \phi(x)) - S_{io} B(x)/B_o}} \qquad (2\text{-}101)$$

$$n_e(x) = n_{e1}\frac{B(x)}{B_1}\;\frac{\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{P_{e1}+S_{e1}+e(\phi(x)-\phi_1)-S_{e1}B(x)/B_1}} \tag{2-102}$$

Die Quasi-Neutralität liefert als Bedingung, daß

Am Rand R_o	Am Rand R_1
$n_e(x) = n_{io}$	$n_i(x) = n_{e1}$

(2-103)

Es folgt aus (2-101) und (2-102) mit Berücksichtigung der Bedingungen (2-103):

$$\frac{n_{e1}}{n_{io}} = \frac{B_1}{B_o}\;\frac{\sqrt{P_{io}}}{\sqrt{P_{io}+S_{io}+e(\phi_o-\phi_1)-S_{io}B_1/B_o}} \tag{2-104}$$

$$\frac{n_{io}}{n_{e1}} = \frac{B_o}{B_1}\;\frac{\sqrt{P_{e1}}}{\sqrt{P_{e1}+S_{e1}+e(\phi_o-\phi_1)-S_{e1}B_o/B_1}} \tag{2-105}$$

Die Gl. (2-104) und (2-105) liefern zwei Beziehungen der Form

$$g_1(n_{io}, n_{e1}, P_{io}, S_{io}, \phi_o, \phi_1, B_o, B_1) = 0 \tag{2-106}$$

$$g_2(n_{io}, n_{e1}, P_{e1}, S_{e1}, \phi_o, \phi_1, B_o, B_1) = 0 \tag{2-107}$$

Aus Gl. (2-106) und (2-107) folgt, daß von den zehn Parametern acht vorgegeben werden müssen. Wie üblich ist es hier vorteilhaft, die Parameter zu normieren. Dazu benutzt man die Definitionen (2-23d) bis (2-23g). g_1 und g_2 lassen sich nun schreiben

$$g_1(\eta, b, V, \tilde{P}_{io}, \tilde{S}_{io}) = 0 \tag{2-108}$$

$$g_2(\eta, b, V, \tilde{S}_{e1}) = 0 \tag{2-109}$$

Für den Fall mit Temperatur erhält man durch eine ähnliche Prozedur die Beziehungen:

$$G_1(\eta, b, V, \tilde{P}_{io}, \tilde{S}_{io}, \alpha_i, \beta_i) \tag{2-110}$$

$$G_2(\eta, b, V, \tilde{S}_{e1}, \alpha_e, \beta_e) \tag{2-111}$$

wobei zusätzlich die Definitionen (2-32) und (2-33) benutzt worden sind.

Zur numerischen Lösung der Poisson-Gl. (2-22) bzw. (2-31) müssen die Paramter der Gl. (2-108) und (2-109) bzw. (2-110) und (2-111) bestimmt werden. Bei vorgegebenen dimensionslosen Energieanteilen $\tilde{P}_{io}$, $\tilde{S}_{io}$ und $\tilde{S}_{e1}$ werden für ausgewählte Potentialdifferenzen Dichte- und Magnetfeldverhältnis bestimmt. Bezüglich (2-110) und (2-111) müssen die Temperaturen α_s und β_s auch vorgegeben werden.

Nach dieser Wahl der vorgegebenen Parameter ist es vorteilhaft, statt g_1 eine andere Beziehung g_1' zu erzeugen, die man nach Einsetzen von η aus (2-109) in (2-108) erhält

$$g_1'(b, V, \tilde{P}_{io}, \tilde{S}_{io}, \tilde{S}_{e1}) = 0 \tag{2-112}$$

Nach der oben genannten Behandlung der Beziehungen (2-104) und (2-105) kann man g_1' und g_2 als explizite Gleichungen für b bzw. η schreiben

$$U\tilde{S}_{e1}b^2 - [U(V+\tilde{S}_{e1}) + \tilde{S}_{io}(1+\tilde{S}_{e1}) + V]b + W\tilde{S}_{io} = 0 \qquad (2\text{-}113)$$

$$\eta = b/\sqrt{W - \tilde{S}_{e1}b} \qquad (2\text{-}114)$$

wobei U und W

$$U = \tilde{P}_{io} + \tilde{S}_{io} + V \qquad (2\text{-}115)$$

$$W = 1 + \tilde{S}_{e1} + V \qquad (2\text{-}116)$$

die dimensionslose gesamte Energie der Ionen bzw. der Elektronen sind.

Für die numerische Berechnung der Parameter im Fall ohne Temperatur wurde folgende Prozedur benutzt:

I) V, $\tilde{P}_{io}$, $\tilde{S}_{io}$ und $\tilde{S}_{e1}$ werden vorgegeben;

II) b wird durch (2-113) bestimmt;

III) η wird aus (2-114) berechnet.

Für den Fall mit Temperatur in der Verteilungsfunktion lassen sich die Beziehungen (2-110) und (2-111) wie im folgenden bestimmen.

Aus Gl. (2-28) und (2-29) lassen sich die Teilchendichten mit Hilfe der Definitionen (2-31b) - (2-31e), (2-32) und (2-33) schreiben

$$n_e(\xi) = n_{e1} M\{\psi(\xi), \tilde{B}(\xi)\}/M_1 \qquad (2\text{-}117)$$

$$n_i(\xi) = n_{io}\, N\{\psi(\xi), \tilde{B}(\xi)\}/N_o \qquad (2\text{-}118)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2-103) folgt aus (2-117) und (2-118)

$$\frac{M(b, V, \tilde{S}_{e1}, \alpha_e, \beta_e)}{M_1(\tilde{S}_{e1}, \alpha_e, \beta_e)} - \frac{N_o(\tilde{P}_{io}, \tilde{S}_{io}, \alpha_i, \beta_i)}{N(b, V, \tilde{P}_{io}, \tilde{S}_{io}, \alpha_i, \beta_i)} = 0 \qquad (2\text{-}119)$$

$$\eta = \frac{M(b, V, \tilde{S}_{e1}, \alpha_e, \beta_e)}{M_1(\tilde{S}_{e1}, \alpha_e, \beta_e)} \qquad (2\text{-}120)$$

Die Bestimmung von b erfolgt nach Vorgabe von allen Parametern mit Ausnahme von η durch die Bestimmung der Nullstelle von (2-119) mit Hilfe eines Iterationsverfahren, da b sich analytisch nicht ausrechnen läßt. Es folgt dann die Berechnung von η durch (2-120).

Die Tabelle 2.1 für den Fall ohne Temperatur zeigt die Werte der Parameter, die die Quasi-Neutralitätsbedingung auf den Rändern R_o und R_1 erfüllen. Die Parameterwerte der Tab. 2.1 zeigen, daß eine gleichmäßige Erhöhung der auf P_{e1} normierten Werte V, $\tilde{S}_{e1}$, $\tilde{P}_{io}$, $\tilde{S}_{io}$ eine relativ geringe Abnahme von b und η ergibt. Zu einer Zunahme von b und η tragen größere Werte von $\tilde{S}_o$ und vor allem von V bei. Für $V = 0$ ist die Quasineutralitätsbedingung nur erfüllt für den Fall, daß das Magnetfeld konstant ist.

In der Tabelle (2-2) sind die Parameter bei zusätzlicher Berücksichtigung der Temperatur α_s, β_s angegeben. Die aufgeführten Parameterwerte entsprechen denjenigen, die man

Tabelle 2-1

	V	$\tilde{S}_1$	$\tilde{P}_o$	$\tilde{S}_o$	b	η
A	0,001	1	1	1	1,032	1,049
B	0,005	1	1	1	1,073	1,112
C	0,01	1	1	1	1,105	1,162
D	0,1	1	1	1	1,370	1,604
E	1	1	1	1	2,618	4,236
F	10	1	1	1	11,916	41,134
G	1	10	1	1	1,153	1,684
H	1	1	10	1	2,132	2,290
I	1	1	1	10	2,882	8,420
J	10	10	1	1	2,091	7,098
K	10	1	10	1	11,522	16,662
L	10	1	1	10	11,950	53,661
M	1	10	10	1	1,109	1,169
N	1	10	1	10	1,171	2,178
O	1	1	10	10	2,406	3,123
P	1	10	10	10	1,117	1,226
Q	10	1	10	10	11,656	19,899
R	10	10	1	10	2,094	8,434
S	10	10	10	1	2,051	2,937
T	100	100	100	100	2,006	3,173
U	0,1	0,1	0,1	0,1	8,531	14,485
V	10^{-10}	1	0,001	1	1,998	4,469
W	10^{-10}	1	1	1	1,000	1,000
X	10^{-10}	1	1000	1	1,000	1,000

Tabelle 2-2

	V	$\tilde{S}_1$	$\tilde{P}_o$	$\tilde{S}_o$	b	η	α_s, β_s
A	0,001	1	1	1	1,012	1,026	0,328
B	0,005	1	1	1	1,037	1,073	0,318
C	0,01	1	1	1	1,060	1,114	0,310
D	0,1	1	1	1	1,290	1,520	0,246
E	1	1	1	1	2,543	4,130	0,100
F	10	1	1	1	11,887	41,035	0,008
G	1	10	1	1	1,145	1,670	0,024
H	1	1	10	1	2,031	2,184	0,240
I	1	1	1	10	2,863	8,552	0,028
J	10	10	1	1	2,089	7,093	0,003
K	10	1	10	1	11,354	16,424	0,048
L	10	1	1	10	11,938	53,629	0,004
M	1	10	10	1	1,104	1,163	0,043
N	1	10	1	10	1,165	2,168	0,015
O	1	1	10	10	2,309	3,018	0,160
P	1	10	10	10	1,110	1,216	0,040
Q	10	1	10	10	11,536	19,703	0,034
R	10	10	1	10	2,092	8,430	0,002
S	10	10	10	1	2,041	2,924	0,018
T	100	100	100	100	2,005	3,172	0,001
U	0,1	0,1	0,1	0,1	8,023	13,992	0,209
V	0,0	1	0,001	1	1,998	46,973	4×10^{-4}
W	0,0	1	1	1	1,000	1,000	0,333
X	0,0	1	1000	1	1,000	1,000	0,062

erhält, wenn man für die parallele und senkrechte Bewegung beider Teilchensorten die gleiche Temperatur annimmt.

Für $V = \tilde{S}_{e1} = \tilde{P}_{io} = \tilde{S}_{io} = \eta$ wird die Abhängigkeit von b und η bei Variation der Temperatur gezeigt, wobei 0,1 die größte mögliche Temperatur ist, die das System annehmen kann. Für andere Kombinationen von V, $\tilde{S}_{e1}$, $\tilde{P}_{io}$ und $\tilde{S}_{io}$ wird in der Tabelle immer die maximale Temperatur gezeigt, die das Modell akzeptiert. Wenn die Temperaturen α_i, β_i, α_e, β_e verschieden voneinander sind, dann sind höhere Werte der einzelnen Temperaturen möglich.

2.5.2 Das Magnetfeld

Das Magnetfeld der Erde kann bei ruhiger Lage der Magnetosphäre bis zu ca. 7 R_E Abstand gut durch das Feld eines Magnetdipols plus kleine Korrekturterme beschrieben werden. Für den äußeren Teil dieses Gebietes berücksichtigt man den Einfluß von elektrischen Strömen, die außerhalb dieser Region liegen. Dieser Einfluß ist für $r \leq 4\ R_E$ vernachlässigbar, wobei r der Abstand zum Erdmittelpunkt ist. Für $r \leq 1{,}5\ R_E$ sind Beiträge von höheren Multipolen des geomagnetischen Feldes am wichtigsten (Roederer, 1970; S. 26).

Für die typische Lage des Beschleunigungsgebietes der Abb. (2.1) in einer Höhe über der Erdoberfläche von 3000 bis

8000 km ($1{,}5\ R_E \lesssim r \lesssim 2{,}5\ R_E$) ist die Annahme eines Dipolfeldes eine gute Approximation.

Wenn das Magnetfeld der Erde durch das Feld eines Dipols repräsentiert wird, dann ist die Stärke des Magnetfeldes gegeben durch (Delobeau, 1971)

$$B = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\sin^2\lambda} \qquad (2\text{-}121)$$

wobei λ die geomagnetische Breite, r der Abstand zum Dipolzentrum und M das magnetische Moment der Erde ist. Das südwärts gerichtete Dipolmoment ist $M = 0{,}311\ \text{Gauss} \cdot R_E^{\,3}$. Die Feldlinien werden durch

$$r = b_o \cos^2\lambda \qquad (2\text{-}122)$$

beschrieben, wobei der Parameter b_o der Abstand der Feldlinien zum Erdzentrum auf der Äquatorebene ist. Es ist üblich, die Feldlinien mit zwei dimensionslosen Parametern

$$L = b_o / R_E \qquad (2\text{-}123)$$

und

$$\lambda_E = \text{arc}\cos^2(1/L) \qquad (2\text{-}124)$$

zu kennzeichnen.

λ_E ist nun die Breite des Punktes, wo die Feldlinie die Erdoberfläche trifft. Die stärksten parallelen elektrischen Felder wurden in Regionen beobachtet, die einer geomagnetischen Breite von $\lambda = 65^\circ\text{-}75^\circ$ entsprechen und eine Ausdehnung

$L \simeq 7 - 20$ haben (Mozer et al., 1977). Für diese Feldlinien bei $r \simeq 2\ R_E$ überwiegt die radiale Komponente des Magnetfeldes gegenüber den anderen polaren Komponenten. Da die Länge des hier angenommenen Beschleunigungsbereiches (ca. 10 km) viel kleiner als sein Abstand zum Erdzentrum ($\gtrsim 2\ R_E$) ist, kann man in erster Näherung die Winkelabhängigkeit in (2-121) vernachlässigen.

Nun haben wir für die numerische Rechnung angenommen, daß das Erdmagnetfeld durch

$$B(x) \sim x^{-3} \tag{2-125}$$

gegeben ist. Diese Annahme stimmt mit (2-73) überein.

2.5.3 Das quasi-neutrale elektrische Potential Ψ_{QN}

Die Annahme, daß zwischen R_o und R_1 Quasi-Neutralität herrscht, erlaubt uns, $\Psi(\xi)$ zu bestimmen, ohne die Poisson-Gleichung zu lösen. In diesem Fall wird das quasi-neutrale Potential $\Psi_{QN}(\xi)$ aus der Bedingung

$$n_i(\Psi_{QN}, B) = n_e(\Psi_{QN}, B) \tag{2-126}$$

bestimmt. Explizit kann man für Ψ_{QN} gemäß Gl. (2-92) und (2-93) in dimensionsloser Form schreiben

$$\Psi_{QN}(\xi) = \left[\tilde{P}_{io} + \tilde{S}_{io} + V - P(1+\tilde{S}_{e1}) + (P\tilde{S}_{e1} - \tilde{S}_{io}/b)\,\tilde{B}(\xi)\right]/(1+P) \tag{2-127}$$

wobei

$$P = \frac{\eta^2}{b^2} \tilde{P}_{io}$$

ist. Gl. (2-73) ist linear in $\tilde{B}(\xi)$. Die Abb. (2-12) zeigt ψ_{QN} als Funktion von ξ für einen Abstand zwischen R_o und R_1 gleich 10 generalisierte Debye-Länge Λ, wie in (2-23b) definiert ist. Für dieses numerische Beispiel wurden aus der Tabelle 2-1 folgende Parameter benutzt: $\tilde{P}_{io} = \tilde{S}_{io} = \tilde{S}_{e1} = 1$, V = 0,005, b = 1,073, η = 1,049.

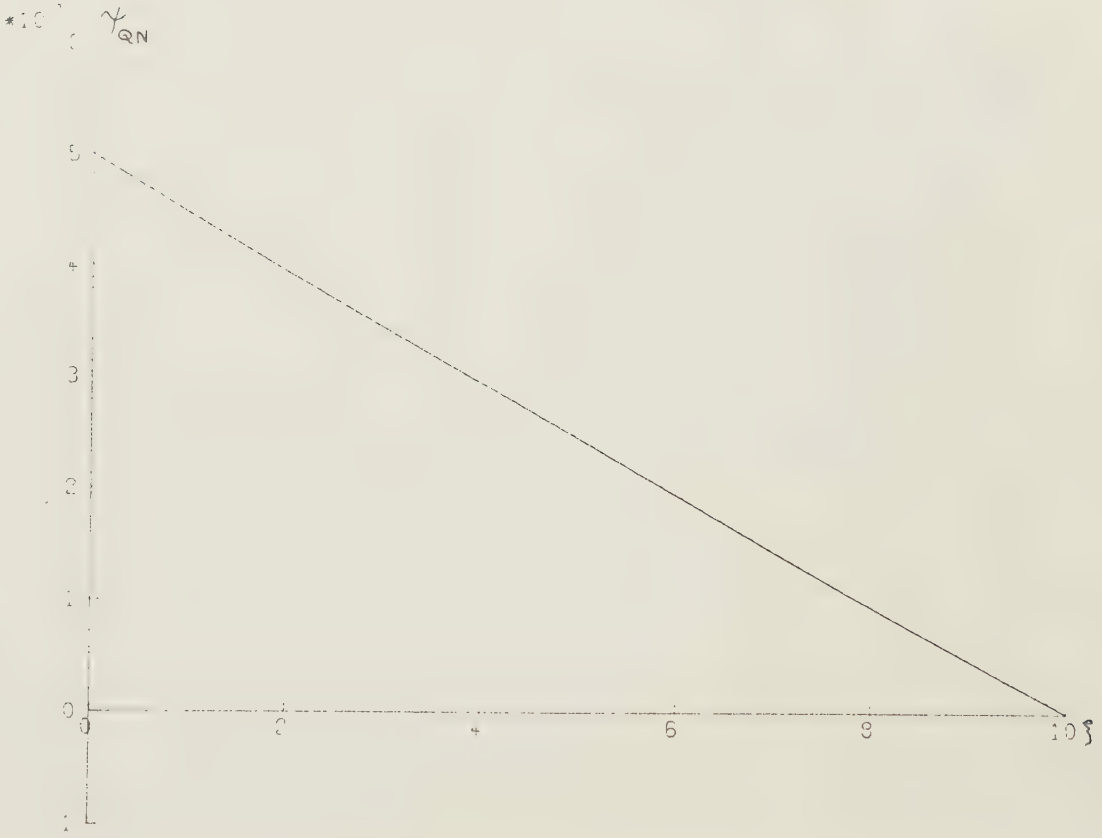
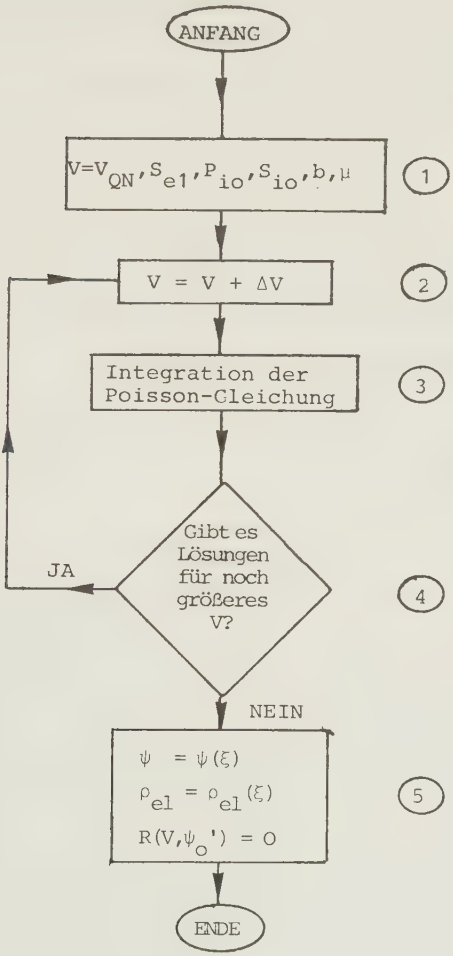


Abb. 2-13: Quasi-neutrales Potential $\psi_{QN}(\xi)$.

2.6 Numerische Lösung

2.6.1 Das numerische Verfahren



Das Flußdiagramm zeigt die wichtigsten Stufen der numerischen Rechnung. In Stufe 1 werden die Parameter gegeben, die aus der Tabelle (2-1) stammen. Falls eine Temperatur in der Verteilungsfunktion berücksichtigt wird, sind die Daten von Stufe 1 aus der Tabelle (2-2) zu entnehmen. In Stufe 2 wird die Abweichung der Quasineutralität eingeführt. Das geschieht durch Vorgabe einer anderen Potentialdifferenz, als der Quasineutralitätsbedingung entspricht. Die anderen Parameter bleiben fest.

In Stufe 3 wird die Poisson-Gleichung unter Benutzung eines "Schießverfahrens" (Stoer, Bulirsch, 1973) und eines Runge-Kutta-Verfahrens integriert. Die Integration in Stufe 3 läuft folgendermaßen:

Statt des Randwertproblems

$$\psi''(\xi) = f(\psi, \xi) \qquad (2\text{-}128a)$$

$$\psi(R_0) = V \qquad (2\text{-}128b)$$

$$\psi(R_1) = 0 \qquad (2\text{-}128c)$$

lösen wir bei dem Schießverfahren das Anfangswertproblem

$$\psi''(\xi) = f(\psi, \xi) \qquad (2\text{-}129a)$$

$$\psi(R_0) = V \qquad (2\text{-}129b)$$

$$\psi'(R_0) = S, \qquad (2\text{-}129c)$$

das eine von s abhängige Lösung $\psi = \psi(\xi, s)$ hat. Das Schießverfahren besteht darin, daß die Randbedingung in R_1 erfüllt wird. $\bar{s}$ sind die Nullstellen der Funktion, die durch ein Newton-Iterationsverfahren bestimmt werden. Die Zahl der Nullstellen von F(s) für einen bestimmten Wert von V gibt die Zahl der Lösungen wieder, die zu diesem V gehören.

Die Werte von $\bar{s}$ und $\bar{V}$ bestimmen eine Relation

$$R(\bar{s}, V) = 0 \qquad (2\text{-}130)$$

deren graphische Darstellung Lösungsdiagramm genannt wird. Die Berechnung von $\bar{s}$ für einen vorgegebenen Wert von V erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird das Gleichungssystem (2-129) für 200 verschiedene Werte von s gelöst. Der Variationsbereich von s für diesen Schritt der Rechnung deckt den gesamten Bereich ab, in dem das numerische Verfahren eine Lösung für (2-129) finden kann. Danach werden die Nullstellen von F(s) durch eine einfache lineare Interpolation angenähert. Die so bestimmten Nullstellen von F(s) werden dann in einem zweiten Schritt als Startwerte für das Schießverfahren benutzt, das $\bar{s}$ genau bestimmt. Falls die Poisson-Gleichung für noch größere Werte von V eine Lösung hat, wird der Anfangswert von ψ variiert und der Prozess wiederholt. Wenn Stufe 5 erreicht wird, kennt man die Anfangsbedingungen V, s für die Lösungen des Problems (2-129), die gleichzeitig auch Lösungen des Problems (2-128) sind.

2.6.2 Beispiele für numerische Lösungen

Für die Untersuchung der Rolle des Magnetfeldes und der Verletzung der Quasineutralitätsbedingung bei der Erzeugung von Potentialdifferenzen haben wir drei Fälle betrachtet, über die wir später berichten werden: (I) konstantes Magnetfeld, (II) Magnetfeld mit grad B $\neq$ O, (III) Magnetfeld mit grad B $\neq$ O und Temperatur $\neq$ O

Für die numerische Lösung der Gl. (2-22) und (2-31) ist es notwendig, die dimensionslosen Parameter $\tilde{P}_o$, $\tilde{S}_o$, $\tilde{S}_1$, V, b, η bzw. $\tilde{P}_o$, $\tilde{S}_o$, $\tilde{S}_1$, V, b, η, α, β vorzugeben, wobei P_o, S_o, S_1 und V nach dem parallelen Anteil der Energie der Elektronen P_{e1} normiert sind.

Obwohl experimentelle Daten über die Verteilungsfunktionen der beschleunigten geladenen Teilchen bei dominierender Parallelkomponente des elektrischen Feldes nicht zur Verfügung stehen, zeigen Messungen beim Auftreten von großen Werten des elektrischen Feldes, daß 5 keV ein typischer Wert für die einzelnen Anteile der kinetischen Energie von beiden Teilchensorten ist (Mizera et al., 1981). Wir haben nun deshalb für die numerische Rechnung

$$\tilde{P}_{io} = \tilde{S}_{io} = \tilde{S}_{e1} = 1$$

gesetzt. Ferner haben wir für die Potentialdifferenz zwischen R_o und R_1 im Fall von Quasineutralität

$$V_{QN} = 0{,}005$$

benutzt. Dieser dimensionslose Wert entspricht für einen Abstand zwischen R_o und R_1 von 10 km einem elektrischen Feld von ca. 2,5 mV/m, was mit dem über großer Länge geschätzten gemittelten elektrischen Feld von ca. 1 mV/m (Mozer et al., 1980) ungefähr übereinstimmt.

Für diese Werte der Parameter sind die anderen Parameterwert η, b, α und β unter der Bedingung der Quasineutralität bestimmt, wie es im Kapitel 2.5 erklärt wurde. Die so bestimmten Parameter können wir aus der Tab. (2-1) und (2-2) ablesen.

Ein Beispiel, das wir berechnet haben, war der Fall mit konstantem Magnetfeld. Obwohl eines unserer Ziele die Berücksichtigung eines räumlich variablen Magnetfeldes bei der Aufrechterhaltung des elektrischen Feldes ist, ist der Fall mit konstantem Magnetfeld nützlich für einen Vergleich, um den Einfluß des Gradienten von B besser zu verstehen.

Die berechneten Beispiele, die wir hier I, II und III nennen, haben folgende Eigenschaften:

Fall I: Konstantes Magnetfeld und keine Temperatur in der Verteilungsfunktion. Die entsprechende Differentialgleichung für das ψ erhält man aus Gl. (2-22)

für $\tilde{B}(\xi) = b$. Die Werte für b und η sind in der Tabelle (2-1) zu finden. Für Fall I (Beispiel W) ist $b = \eta = 1$, da die Quasineutralität verlangt, daß die Potentialdifferenz zwischen R_o und R_1 in diesem Fall Null ist. Das kann man leicht sehen, wenn man $\tilde{P}_{io} = \tilde{S}_{io} = \tilde{S}_{e1} = b = 1$ in der Gl. (2-113) setzt.

Fall II: Variables Magnetfeld und keine Temperatur in der Verteilungsfunktion. Die hier integrierte Differentialgleichung ist (2-22) und die Werte der Parameter sind in der Tab. (2-1) unter Beispiel B zu finden.

Fall III: Variables Magnetfeld und Verteilungsfunktion mit Temperatur. Hier ist (2-31) die Gleichung, die das Potential γ beschreibt. Das Beispiel B der Tab. (2-2) zeigt die Parameter für $\tilde{P}_{io} = \tilde{S}_{io} = \tilde{S}_{e1} = 1$, $V_{QN} = 0{,}005$, wobei $\alpha_s = \beta_s = 0{,}138$ der vom Modell akzeptierte höchste Wert ist. Da die Kastenverteilungsfunktion nur für kleine Werte von α_s, β_s realistisch ist, haben wir für diesen Fall $\alpha_s = \beta_s = 0{,}05$ angenommen. Die entsprechenden Werte für b und η sind:

$b = 1{,}073$,

$\eta = 1{,}112$.

Wir haben für den Mittelwert des parallelen bzw. senkrechten Anteils der kinetischen Energie

5 keV angenommen, wegen $\alpha_s = \beta_s = 0{,}05$ haben die Teilchen Energieanteile zwischen 4,75 keV und 5,25 keV.

2.6.3 Die Lösungsdiagramme

Die Abb. (2-12a, b), (2-13a, b) und (2-14a, b) zeigen die Lösungsdiagramme für die Fälle I, II und III. In allen drei Fällen wurde die Integrationslänge gleich 10Λ gesetzt. Jedes Diagramm besteht aus zwei Teilen, die wir getrennt mit verschiedenen Skalen zeigen. Der erste Teil entspricht dem Bereich $-1 < V < 5$ und der zweite Teil dem Bereich $V > 9$. Zwischen beiden Bereichen wurden keine Lösungen gefunden, die die Randbedingungen $\psi(\xi = 0) = V$ und $\psi(\xi = 10) = 0$ erfüllen.

Jedem Punkt auf einer Kurve des Diagramms entspricht eine Lösung des Problems (2-128). Jede durchgezogene Kurve wird durch einen Buchstaben gekennzeichnet, welcher die auf der Kurve liegenden Punkte identifiziert. Ein Punkt wird also durch einen Buchstaben und zwei Indizes gekennzeichnet. Der untere Index ist der Wert von V für diesen Punkt. Der obere Index gibt an, ob der Punkt einem positiven oder einem negativen Wert von $(d\psi/d\xi)|_{\xi=0}$ entspricht. Eine Verdopplung dieses Zeichens wird benutzt, wenn eine Kurve zwei Äste auf einer Halbebene hat, und das Doppelzeichen kennzeichnet, ob die Lösung auf dem tieferen oder auf dem höheren Ast liegt.

Von Interesse sind hier nur die Punkte auf diesem Diagramm, die $V > 0$ haben, so daß die Elektronen im Mittel in Richtung der Erde beschleunigt werden.

Wir führen jetzt eine Analyse von jedem einzelnen Fall durch:

Fall I: Die Bedingung $V > -1$ haben wir in Kapitel 2.2 schon gezeigt. Sie muß erfüllt sein, damit die Teilchengeschwindigkeit reell ist.

Die quasineutrale Lösung liegt im Diagramm an der Stelle $V = 0$, $\psi'(\xi = 0) = 0$, wo die Kurve E den Koordinatenursprung durchläuft, und in diesem Fall ist $\psi_{QN}(\xi) = 0$, da das Magnetfeld konstant ist. Für $V = 0$ gibt es zusätzlich noch sechs andere Lösungen $\psi(\xi)$: A_0^-, B_0^-, C_0^-, E_0^-, B_0^-, C_0^-.

Bei $V \simeq 0{,}16$ kreuzen sich die Kurven D und E. Man kann diese Kreuzung als eine Verzweigung der Kurve E interpretieren. Im Abschnitt 2.6.4 werden wir dieses Problem behandeln.

In diesem ersten Teil des Diagramms hören bei $V \simeq 4{,}7$ die Lösungen auf. Die nächste Lösung im zweiten Teil fängt bei $V \simeq 8{,}7$ an. Bei $V \simeq 11{,}3$ gibt es wieder eine Verzweigung, dieses Mal von der Kurve F. Die Kurve G hört bei $V \simeq 22$ auf, während die Kurve F für $\psi'(\xi = 0) < 0$ sich nach Unendlich erstreckt.

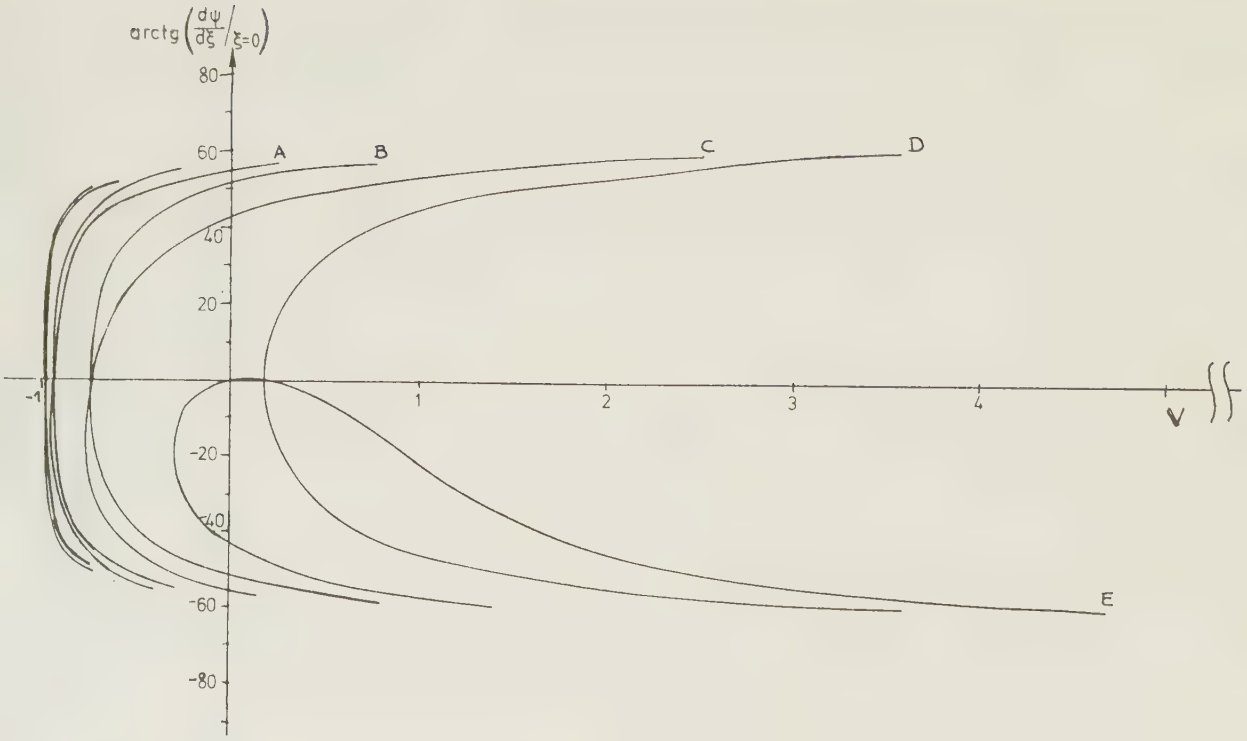


Abb. 2-12a: Lösungsdiagramm des Falles I.

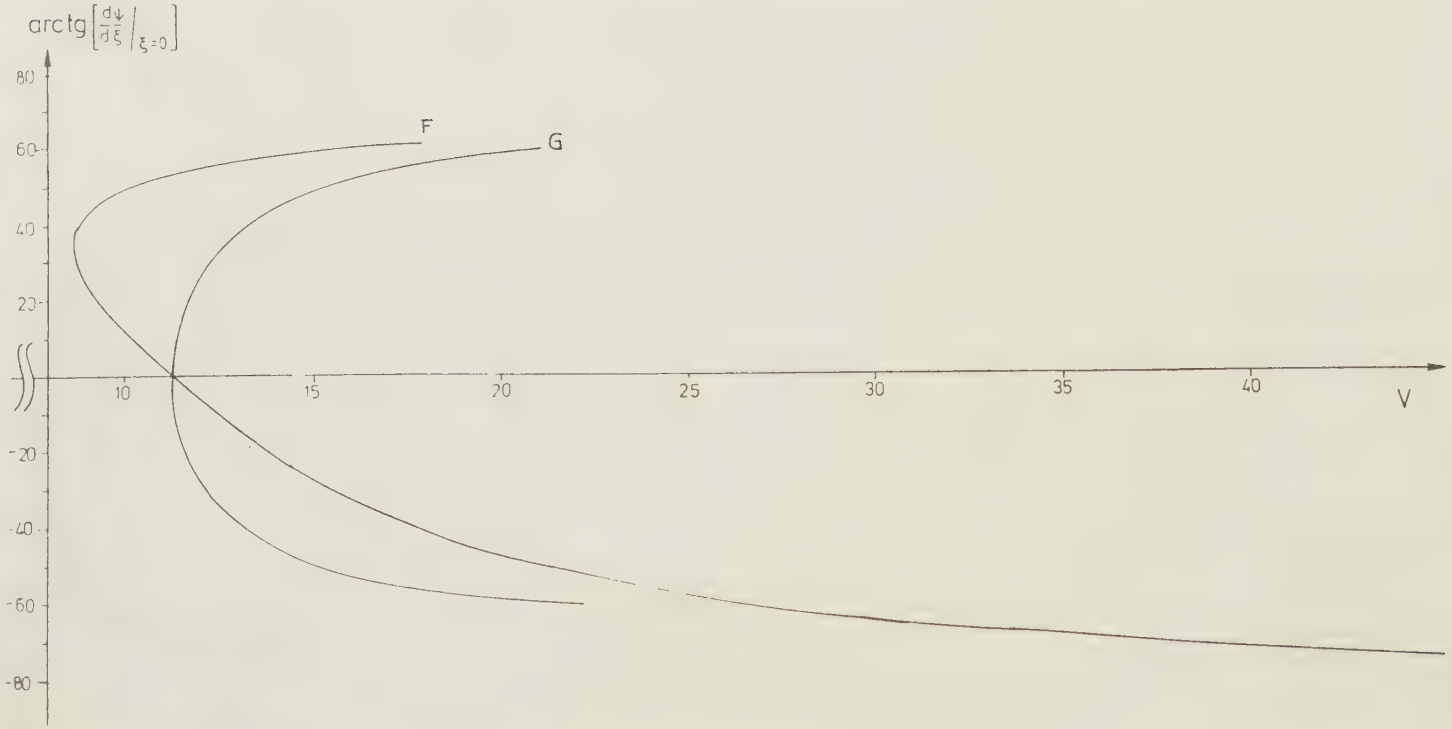


Abb. 2-12b: Fortsetzung des Lösungsdiagrammes des Falles I.

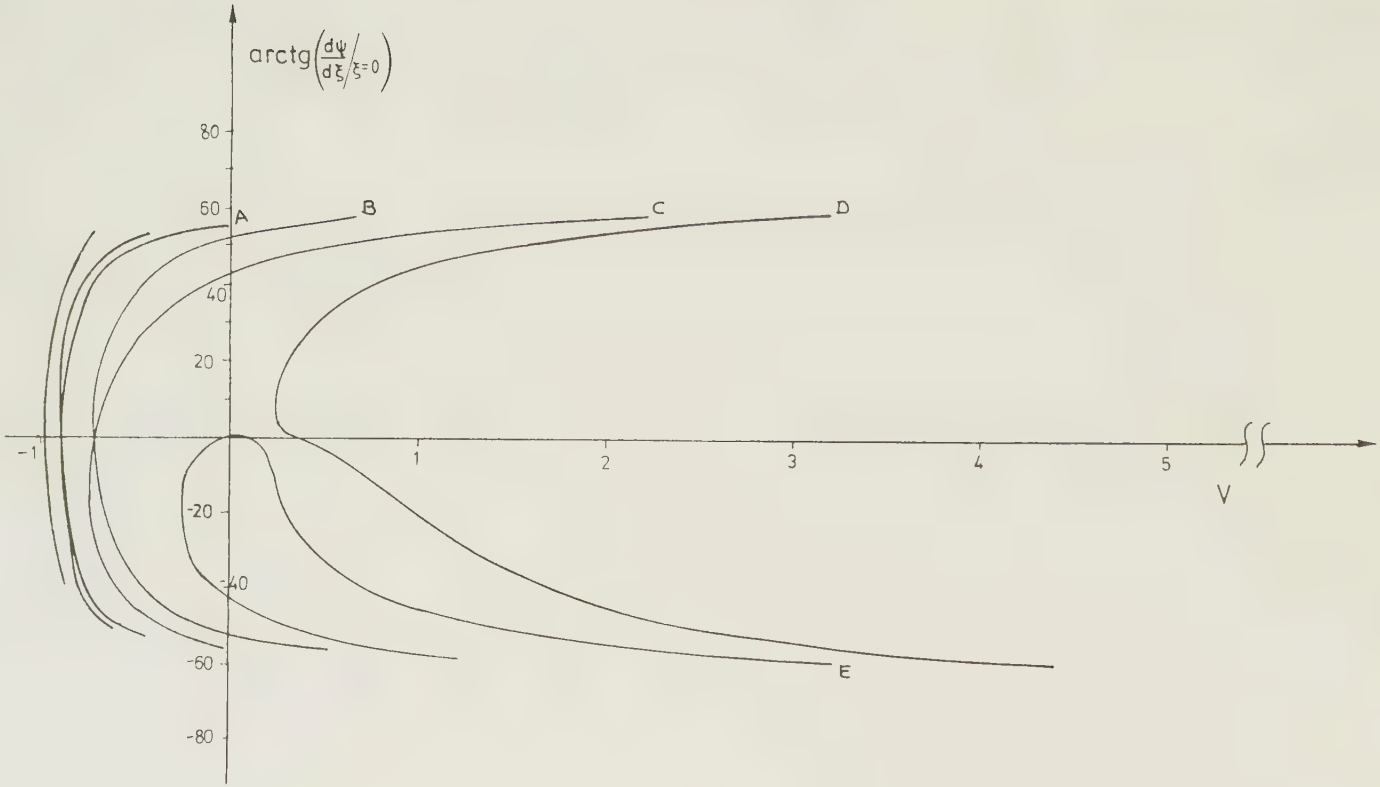


Abb. 2-13a: Lösungsdiagramm des Falles II.

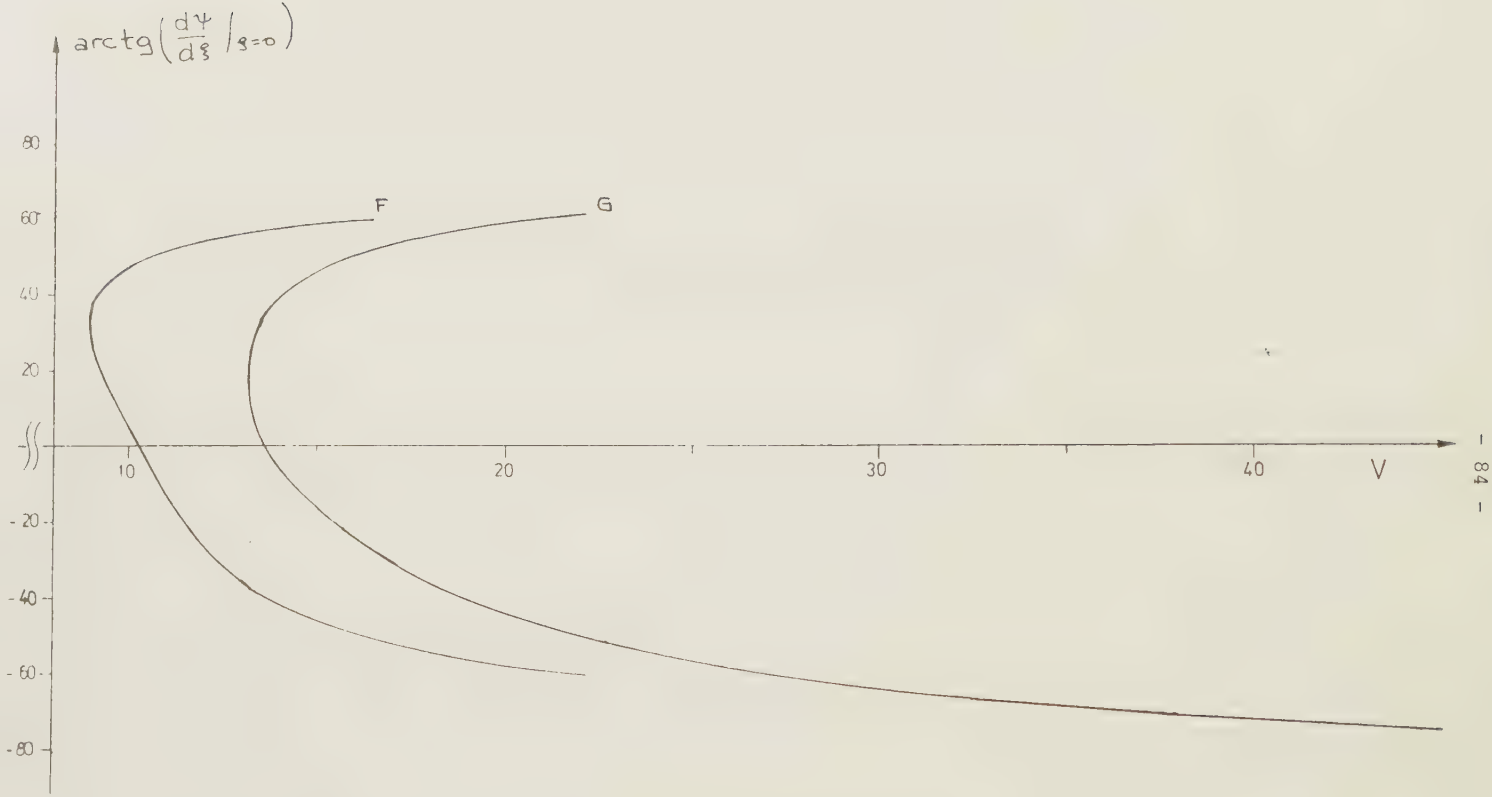


Abb. 2-13b: Fortsetzung des Lösungsdiagrammes des Falles II.

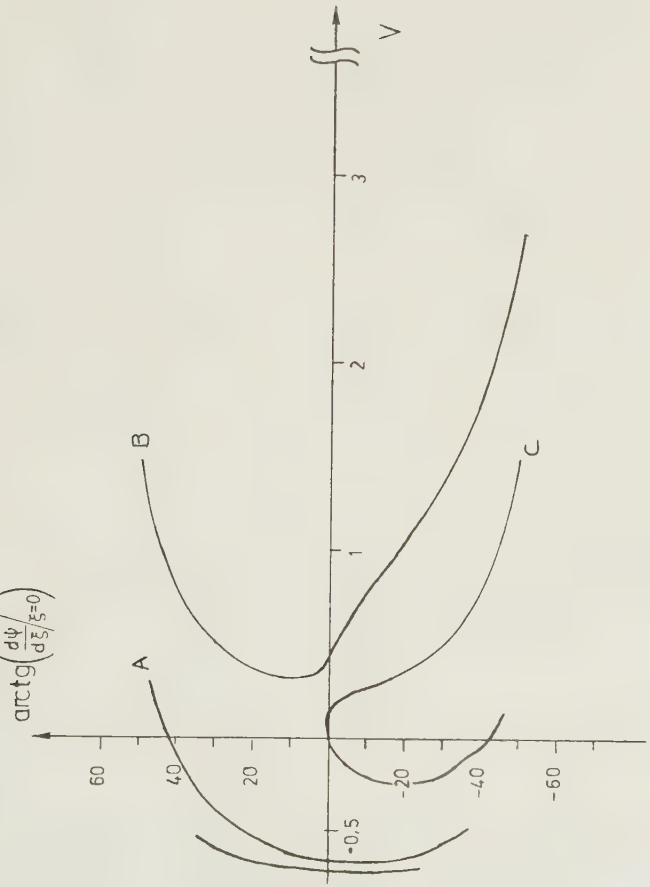


Abb. 2-14a: Lösungsdiagramm des Falles III.

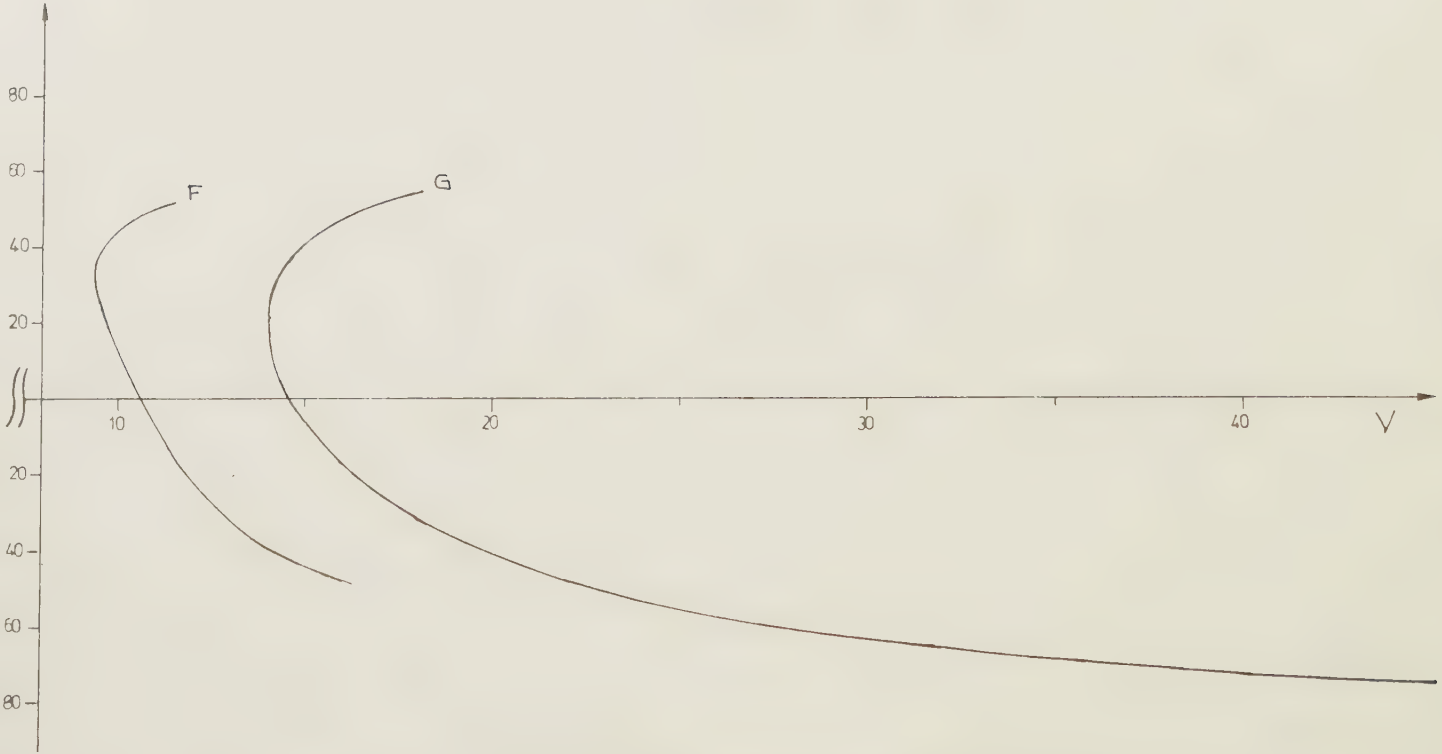


Abb. 2-14b: Fortsetzung des Lösungsdiagrammes des Falles III.

Fall II: Wenn man das Lösungsdiagramm der Abb. 2-13a, b mit dem des Falles I vergleicht, ist die Wirkung eines kleinen Gradienten von B deutlich zu sehen. Während für $V < 0$ die Unterschiede klein sind, sind sie für $V > 0$ sehr groß. Man beobachtet vor allem eine Veränderung der Topologie an den Stellen, wo im Fall I eine Verzweigung stattfindet. Außerdem wird im ersten Teil der Bereich von V kleiner, für den eine Lösung existiert.

Fall III: Wenn man eine endliche Temperatur in der Verteilungsfunktion annimmt, bleiben die Effekte erhalten, die durch den Magnetfeldgradienten verursacht werden. Im Vergleich zum Fall II sind im ersten Teil des Lösungsdiagramms (Abb. 2-14a) die größten Unterschiede zu sehen: das Verschwinden von einigen Lösungsästen und die Verkürzung von den gebliebenen Ästen. Im zweiten Teil des Lösungsdiagramms (Abb. 2-14b), außer einer Verkürzung des Astes F, ist eine Verschiebung von Ast G zu bemerken.

2.6.4 Die Bifurkation im Lösungsdiagramm

Wie schon oben erwähnt wurde, zeigte das Lösungsdiagramm des Falles I Verzweigungen. Mit Einführung eines variablen Magnetfeldes und von ungeordneter Bewegung verschwinden solche Verzweigungen, was wir als Konsequenz einer Topologieänderung interpretieren.

Obwohl in der Abb. 2-13a der Ast D nicht mehr eine Verzweigung des Astes E ist, sind die Punkte P_1 und P_2 Bifurkationspunkte. Das bedeutet im Sinne der Bifurkationstheorie, daß am Punkt P ein Übergang der Stabilität stattfindet (Iooss und Joseph, 1980: S. 22), d.h. das System ist für die Lösungen, die auf einem Teil des Astes liegen, stabil und der Punkt P trennt diesen Teil von dem Teil, auf dem die Lösungen instabil sind. Wir weisen jedoch darauf hin, daß es sich hier um mathematische Stabilität handelt.

Um den Zusammenhang zwischen der Bifurkation im Lösungsdiagramm und Stabilität besser zu verstehen, betrachten wir den Fall ohne Magnetfeld, in dem die Ionen im Hintergrund fest sind, während die Elektronen ohne ungeordnete Bewegung in einer Richtung strömen.

Im Kapitel 3.4 untersuchen wir die Stabilität dieses Systems, das durch das linearisierte Gleichungssystem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q\varphi = 0 \qquad (2\text{-}131a)$$

$$\varphi(R_0) = 0 \qquad (2\text{-}131b)$$

$$\varphi(R_1) = 0 \qquad (2\text{-}131c)$$

repräsentiert wird. φ ist ein Vektor, dessen Komponenten Störungen des elektrischen Feldes ϵ und der Geschwindigkeit sind.

Das Gleichgewicht für den Fall, daß die Ionendichte eine

Konstante ist, erhält man aus der Gl. (2-22), wenn man außer $\tilde{B} = b = 1$ noch im zweiten Summanden $\Psi = V$ setzt. Die Abb. 2-15 zeigt das Lösungsdiagramm für dieses Problem. Wir würden im Punkt P dann einen Übergang erwarten, wenn an dieser Stelle ein infinitesimaler Nachbarzustand φ_o mit folgenden Eigenschaften existiert: Die Mode φ_o genügt der Gleichung $Q\varphi_o = 0$ und erfüllt dieselben Randbedingungen wie diejenigen, die in der Stabilitätsanalyse benutzt werden.

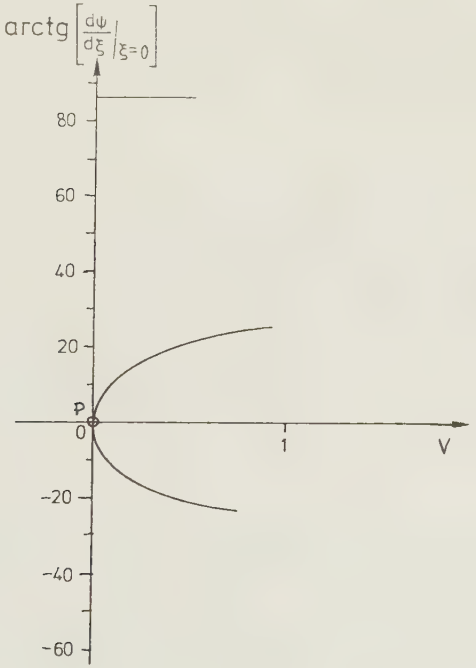


Abb. 2-15: Lösungsdiagramm: Ionen fest im Hintergrund.

In unserem Fall ist die erste dieser beiden Bedingungen erfüllt, da man in der Nähe von P φ_0 als Differenz der beiden Lösungen zum gleichen Wert von V verstehen kann. In Bezug auf die Randbedingung dagegen garantiert das benutzte Konstruktionsverfahren der Gleichgewichtslösungen nur, daß beide Lösungen dieselbe Potentialdifferenz V besitzen, so daß für φ_0 die Potentialdifferenz verschwindet. Es gilt also für die Mode φ_0, daß für die Störung des elektrischen Feldes

$$\int_{R_0}^{R_1} \epsilon \, dx = 0$$

einzige Randbedingung ist.

Für die Stabilitätsanalyse wird außerdem das Verschwinden aller Störungen auf beiden Rändern gefordert. Unsere Stabilitätsanalyse in Kap. 3.4 wird also i.a. die betrachteten Systeme stabiler finden als eine Bifurkationstheorie. Dieser Sachverhalt ist konsistent mit unserem Ergebnis, daß die in Abb. 2-15 dargestellten Lösungen alle physikalisch stabil sind (s. Kap. 3.4).

Da das Magnetfeld die Bifurkationen im Fall I verändert (s. Abb. 2-12 und 2-13), soll man erwarten, daß das Magnetfeld eine nicht vernachlässigbare Rolle in der Stabilität dieser Systeme spielt.

2.6.5 Das Potential und die Dichte

Wir haben in Kapitel 2.2 qualitativ das oszillatorische

Verhalten des Potentials $\psi(\xi)$ diskutiert. Für den Fall mit konstantem Magnetfeld erwartet man, daß das Potential konstante Aplitude hat, weil das der oszillatorischen Bewegung eines fiktiven Teilchens in einem konservativen Kraftfeld entspricht.

Da das quasineutrale Potential ψ_{QN} einen sehr kleinen Gradienten hat, interessieren uns die Lösungen $\psi(\xi)$, die einen kleinen Wert für $\psi'(\xi = 0)$ und $V > \psi_{QN}$ haben. Solche Lösungen lassen sich leicht an eine quasineutrale Umgebung anpassen. Diese Lösungen sind diejenigen, die in der Nähe der Kreuzung eines Astes mit der Achse $\psi' = 0$ im Lösungsdiagramm liegen.

Die Abb. 2-16 zeigt die Lösungen für die Punkte $D^{+}_{0,18}$, $E^{-}_{0,18}$ und $D^{-}_{0,18}$, die in der Nähe einer Verzweigung liegen. Wie schon in Kapitel 2.4 diskutiert, erwartet man, daß für $V \ll 1$, wie es hier der Fall ist, die Funktion $\psi(\xi)$ durch eine Sinusfunktion gut approximiert wird.

Die Abb. 2-17 zeigt $\psi(\xi)$ für den zweiten Fall des Lösungsdiagramms im Fall I. Gezeigt werden Lösungen von den Punkten $G^{+}_{11,3}$, $G^{-}_{11,3}$ und $F^{-}_{11,3}$, die in der Nähe und auch auf der rechten Seite der Bifurkation liegen. Während die Beispiele der Abb. 2-16 mehrere Wellenzüge zeigen, haben die Lösungen der Abb. 2-17 einen glatten Verlauf. Das ist die Konsequenz der Variation der charakteristischen Länge der oszillatorischen Struktur in Abhängigkeit von V.

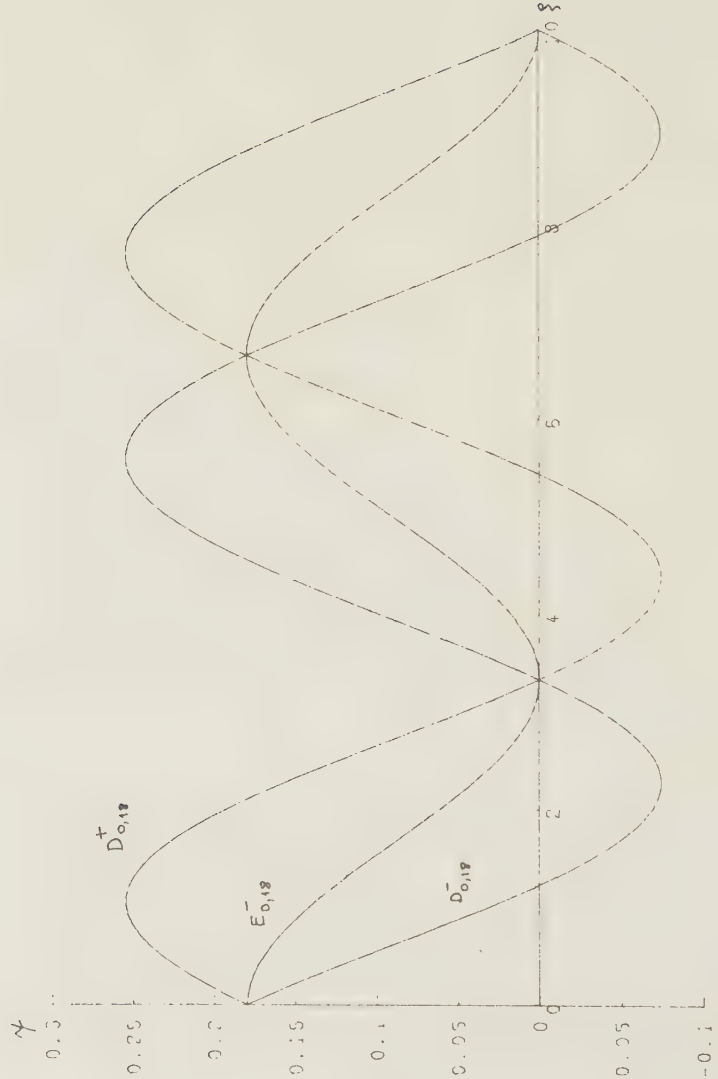


Abb. 2-16: Potential $\gamma(\xi)$ für $\tilde{B}$ = const.

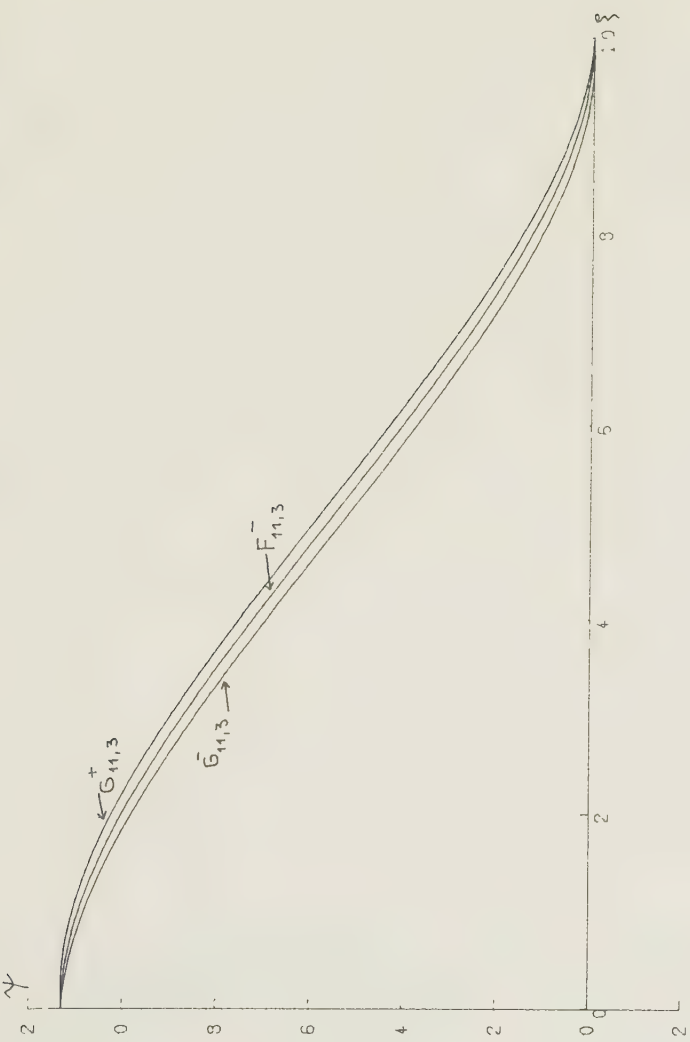


Abb. 2-17: Potential $\Psi(\xi)$ für $\tilde{B}$ = const.

Die Abb. (2-18) und (2-19) zeigen die Funktion

$$\rho(\xi) = - d^2\psi/d\xi^2$$

die einer Ladungsdichte für die dimensionslose Gl. (2-22) entspricht. Für die Lösungen $\rho(\xi)$ mit V = 0,18 verteilen sich die Teilchen in mehreren Schichten mit wechselndem Vorzeichen. Für V = 11,3 erhält man eine Struktur, die in der Literatur als Doppelschicht bezeichnet wird.

Für konstantes Magnetfeld im Fall I existieren für $V > 0$ nur zwei Umgebungen, wo $\psi'(\xi) \approx 0$ ist. Durch den Einfluß des Magnetfeldes wird die Umgebung der Bifurkationspunkte verändert. Als Konsequenz davon verdoppelt sich die Zahl von Umgebungen, wo eine Lösung $\psi(\xi)$ mit $\psi_o' \approx 0$ zu finden ist. Dieser Effekt bleibt auch erhalten, wenn wir ungeordnete Bewegung in Form einer kleinen Temperatur in der Verteilungsfunktion berücksichtigen. Damit ist es jetzt möglich, eine Lösung $\psi(\xi)$ mit $\psi_o' \approx 0$ zu finden, die einen Wert V etwa doppelt so groß hat wie die Lösung, die wir in Abb. 2-16 für den Fall mit konstantem Magnetfeld gezeigt haben. Die Abb. 2-20 zeigt $\psi(\xi)$ für den Punkt $D^-_{0,35}$ des Falles II. Entsprechend zeigt die Abb. 2-21 $\rho(\xi)$ für diesen Punkt.

Die Berücksichtigung von ungeordneter Bewegung verändert das oben beschriebene Bild in dem Sinne, daß noch höhere Werte von V für $\psi_o' \approx 0$ erzielt werden können, wie man in der Abb. 2-22 für den Punkt $B^-_{0,45}$ des Falles III sehen kann. Die Abb. 2-23 zeigt die entsprechende graphische Darstellung

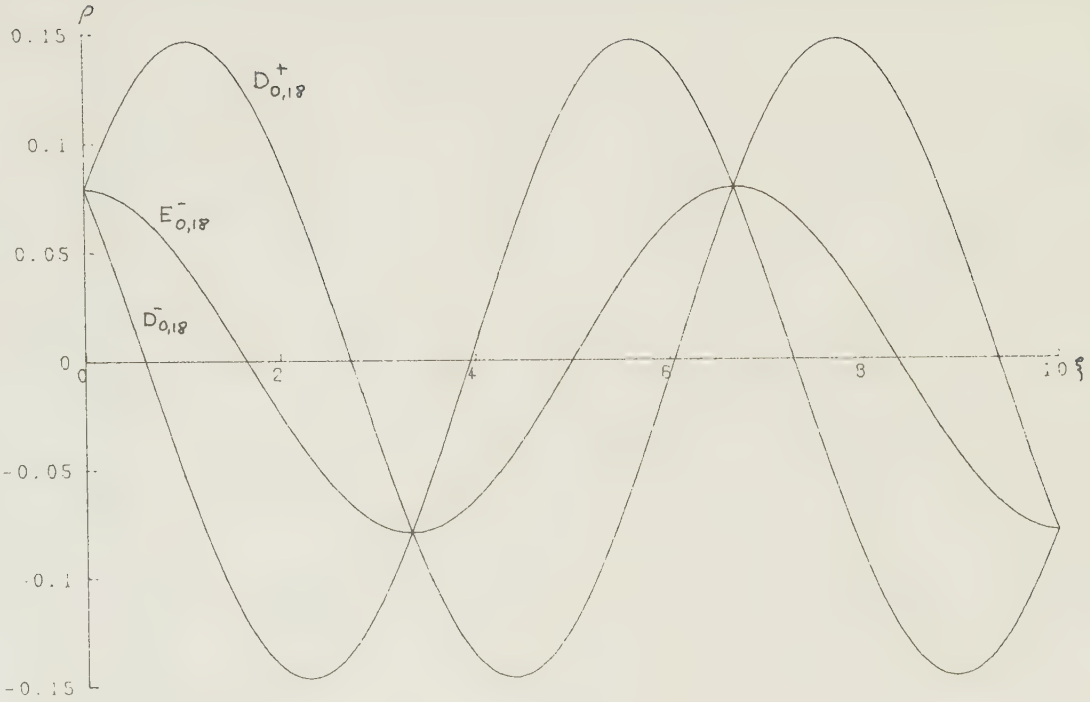


Abb. 2-18: Ladungsdichte für die Lösungen der Abb. 2-16.

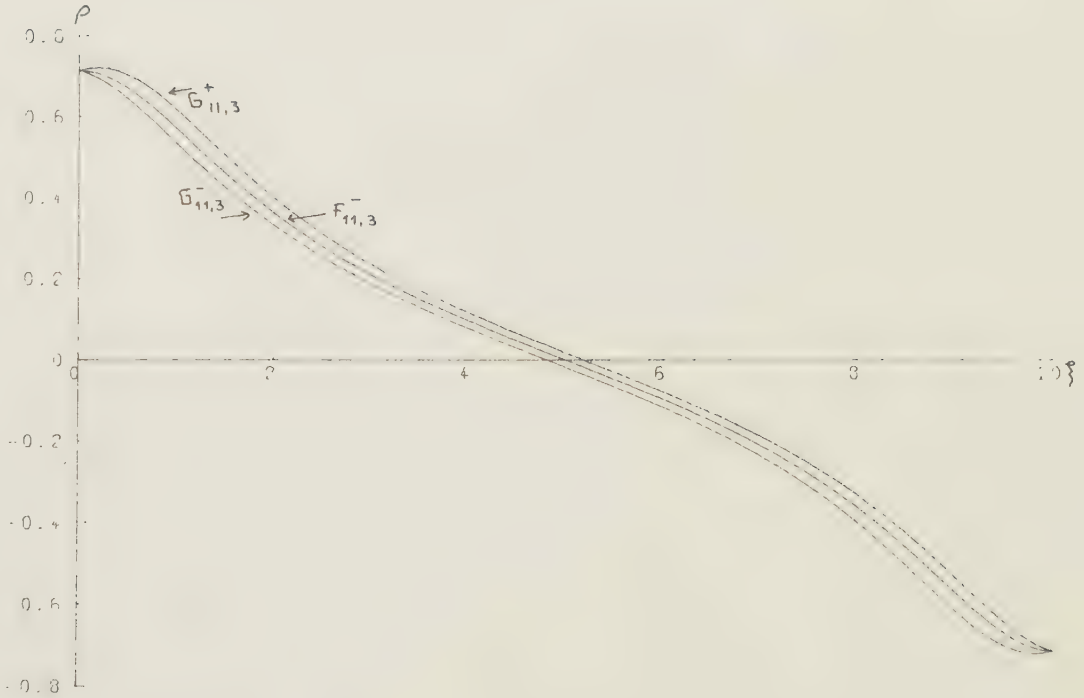


Abb. 2-19: Ladungsdichte für die Löaungen der Abb. 2-17.

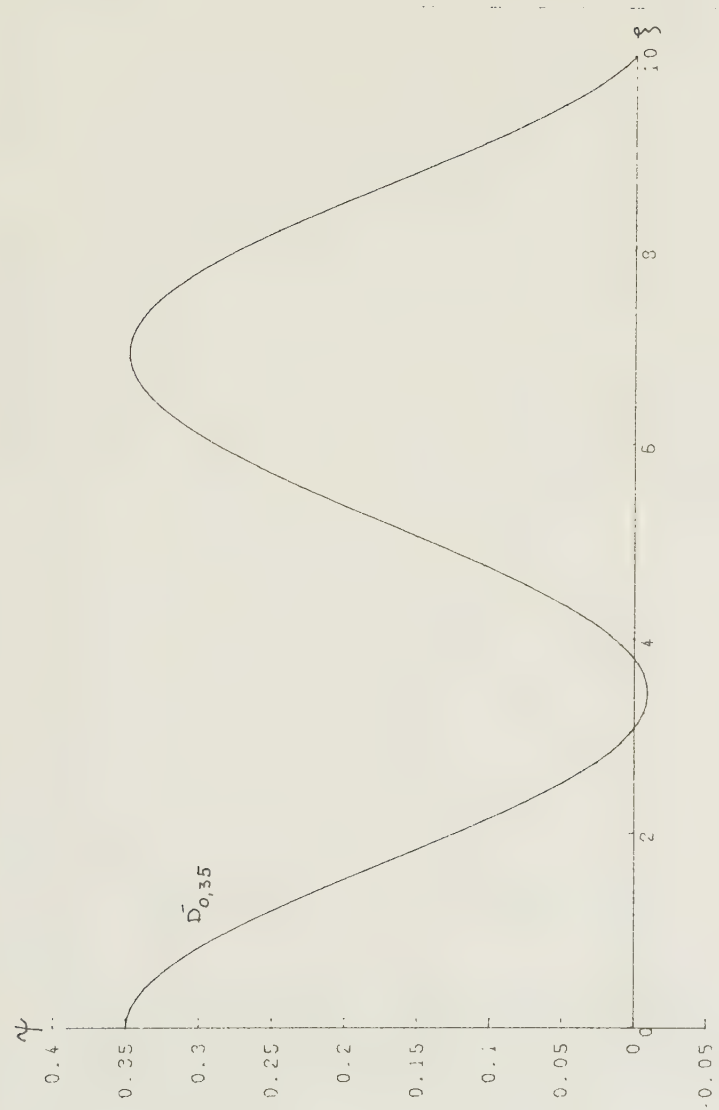


Abb. 2-20: Potential $\psi(\xi)$ für grad $\tilde{B} \neq 0$.

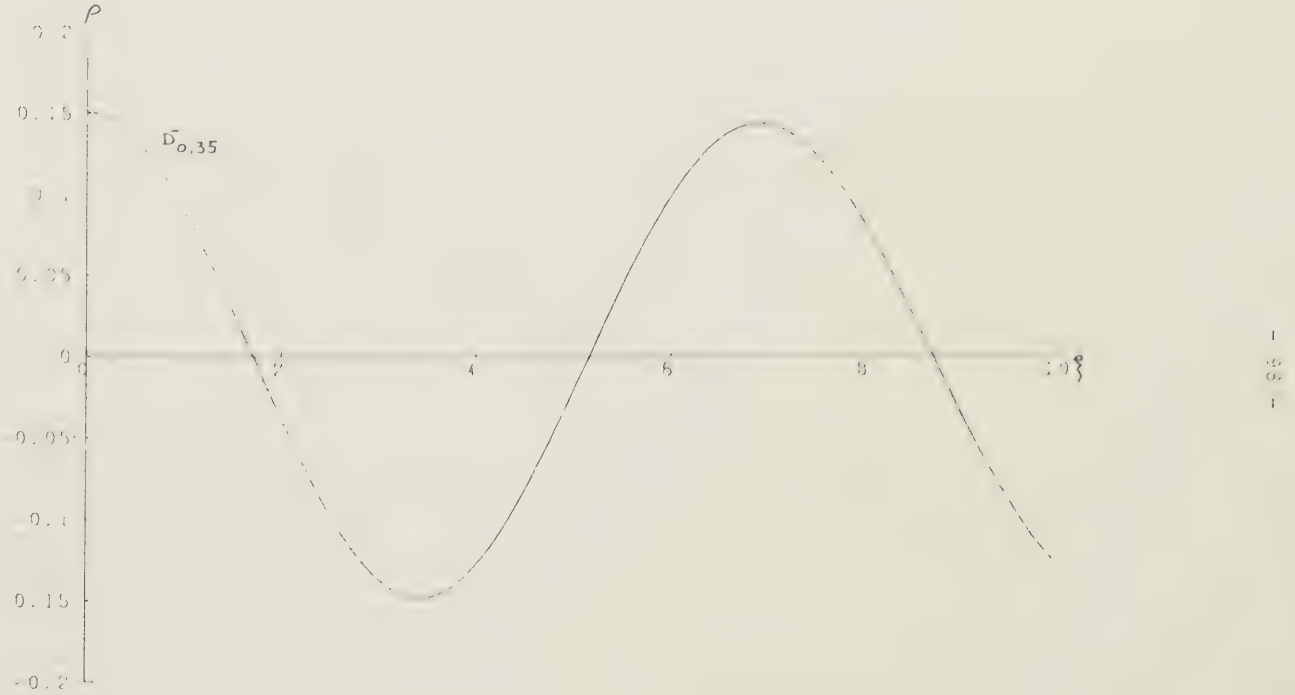


Abb. 2-21: Ladungsdichte für die Lösung der Abb. 2-20.

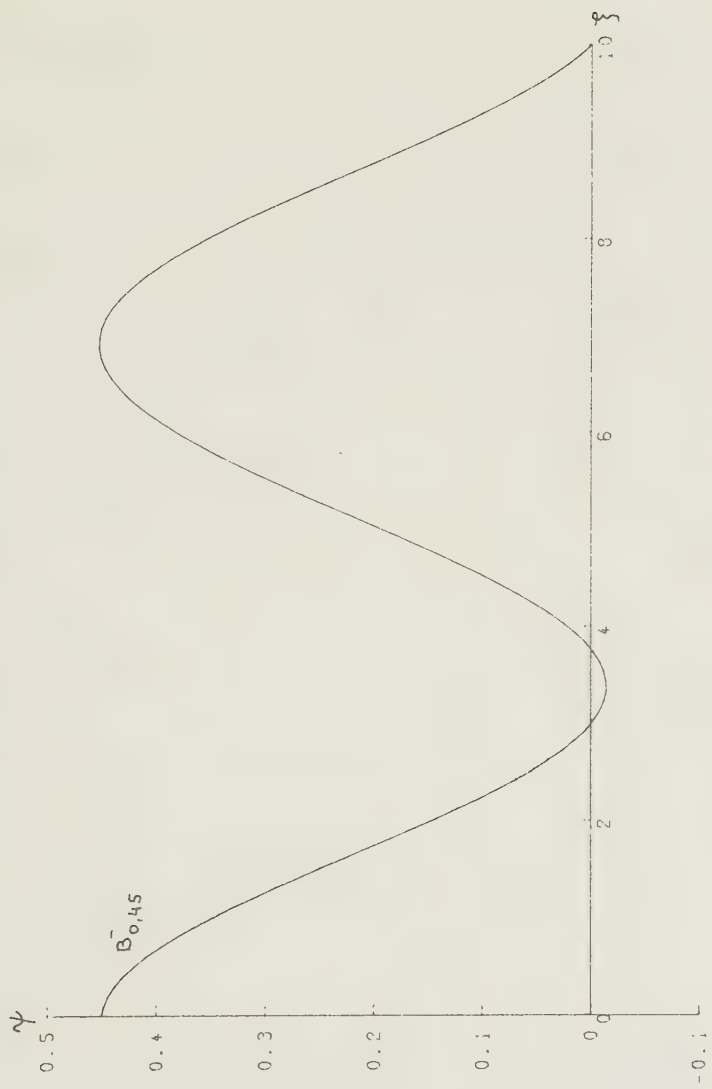


Abb. 2-22: Potential $\psi(\xi)$ für grad $\tilde{B} \neq 0$ mit Temperatur.

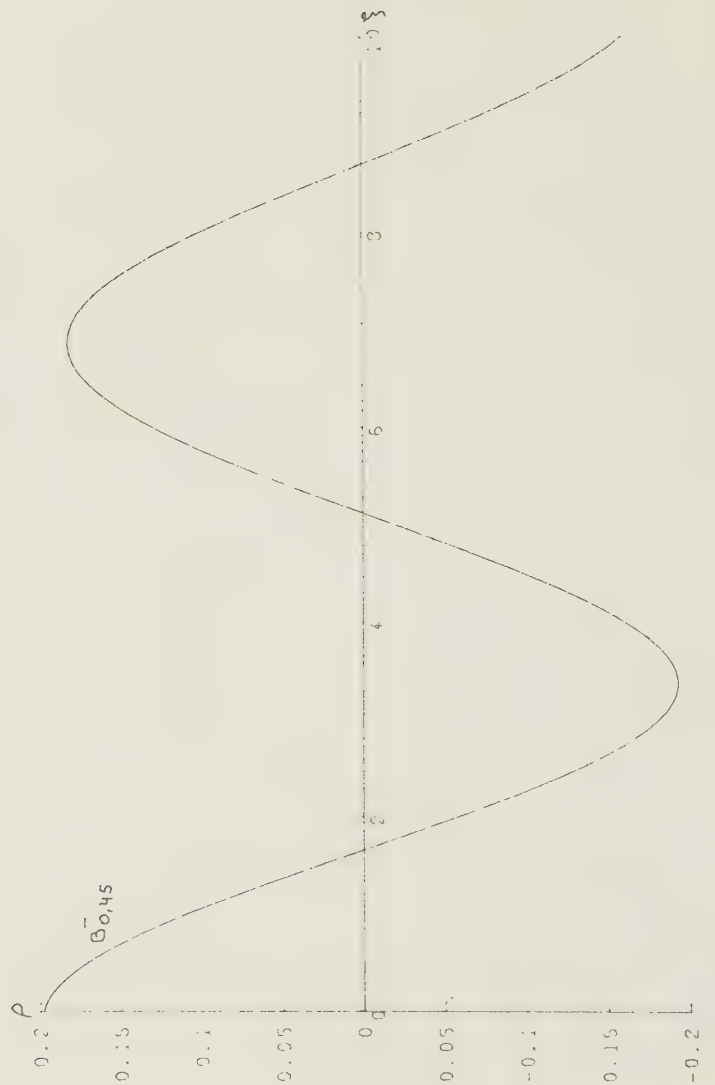


Abb. 2-23: Ladungsdichte für die Lösung der Abb. 2-22.

für $\rho(\xi)$.

2.6.6 Diskussion

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, welche selbstkonsistenten Lösungen wir für ein elektrisches Feld parallel zu einem vorgegebenen Magnetfeld in einem System mit Teilchenströmen parallel zu den Feldern erwarten können, wenn die Bedingung für Quasineutralität verletzt wird. Wir haben dieses Problem in drei Fällen untersucht: (I) für ein konstantes Magnetfeld; (II) für ein Magnetfeld mit räumlicher Abhängigkeit; (III) für ein variables Magnetfeld mit zusätzlicher Berücksichtigung ungeordneter Bewegung der Teilchen.

Die Wirkung des variablen Magnetfeldes zeigt sich im Lösungsdiagramm in einer Änderung der Topologie und Verschiebung von Bifurkationspunkten. Falls an den im Lösungsdiagramm auftretenden Bifurkationspunkten eine Änderung des Stabilitätsverhaltens auftritt, dann bedeutet eine Verschiebung des Bifurkationspunktes eine Variation der Parameter des marginalen Falles. Ein Stabilitätsübergang an Bifurkationspunkten müßte jedoch durch eine getrennte physikalische Stabilitätsanalyse nachgewiesen werden.

Bezüglich der Lösung für das Potential erhält man sowohl oszillatorische als auch monotone Strukturen. Dem entspricht für die Teilchen die Entstehung von Mehrfach- oder von Doppelschichten.

Mit geeigneter Wahl der Parameter ist es möglich, eine Anpassung der hier gerechneten Lösungen an eine quasineutrale Umgebung vorzunehmen, wenn wir die Verletzung der Bedingungen für Quasineutralität als ein lokales Ereignis verstehen. Die Abb. 2-24 zeigt, wie man sich die Anpassung vorstellen kann, wobei QN die Bereiche bezeichnet, wo die Bedingungen für Quasineutralität erfüllt sind.

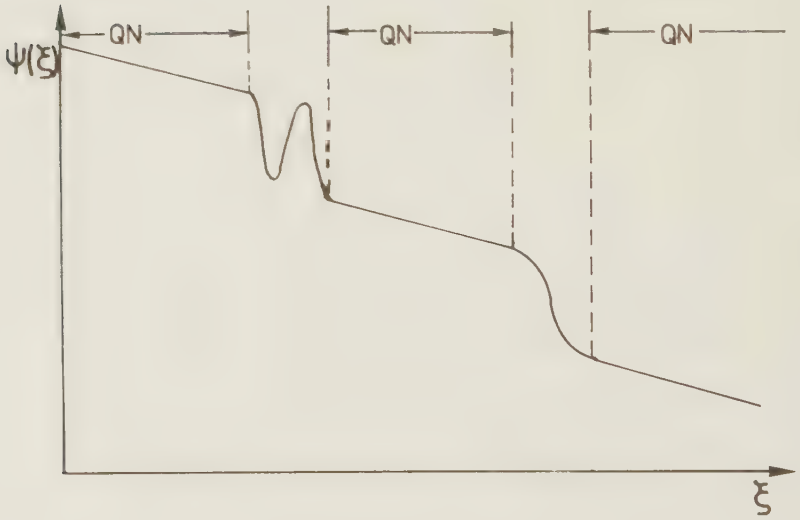


Abb. 2-24: Skizze der Anpassung der Lösungen in einem quasineutralen Medium

Wir haben uns in diesem Kapitel nur für den Teil der Lösungsdiagramme mit $V = \Psi(\xi = 0) > 0$ interessiert, weil das einer Beschleunigung der Elektronen im Mittel in Richtung der Erde entspricht. Der Bereich für $V < 0$ im Lösungsdiagramm erzeugt auch oszillatorische Strukturen, bei denen das Potential negativ ist. Wenn das Potential einen monotonen Verlauf hat, entspricht dieser Fall der Entstehung einer Doppelschicht mit negativer Solitärwelle (Hasegawa und Sato, 1982).

Im Hinblick auf die Erklärung der beobachteten lokalisierten elektrischen Feldstrukturen in der erdnahen Magnetosphäre sowie der entsprechenden Potentialdifferenzen, die zu den beobachteten kinetischen Energien der Teilchen führen, kann unser Modell folgende Antworten geben.

Die angenommene lokalisierte Abweichung der Quasineutralität kann sowohl glatte Strukturen wie in der Abb. 2-17 als auch die in Abb. 2-16, 2-20 und 2-22 gezeigten oszillatorischen Strukturen erklären. Die Lösungsdiagramme zeigen, daß der Lösungsraum der Poisson-Gleichung Lösungen enthält, die sehr große Werte für elektrisches Feld und Potentialdifferenz aufweisen.

Wie in der Abb. 2-24 gezeigt, kann man eine große Potentialdifferenz zwischen Magnetosphäre und Ionosphäre verstehen, wenn man annimmt, daß diese Potentialdifferenz in einer

Reihe von kleinen Stufen des Potentials verteilt ist. Das entspricht den Beobachtungen von Temerin et al. (1982), bei denen die oszillatorischen Strukturen in Ereignissen mit mittlerem Zeitabstand von 1,5 s beobachtet wurden.

Die Lösungen der Abb. 2-20 und 2-22 erlauben eine Abschätzung des elektrischen Feldes. Die dimensionslose Potentialdifferenz Ψ von circa 0,4 bedeutet für die hier angenommene Größenordnung der Teilchenenergie von 5 keV eine Potentialdifferenz von circa 2 kV in circa $4\lambda_D \approx 2$ km (vgl. Gl. (2-23)), was etwa 1 V/m ergibt. Andere Lösungen der Lösungsdiagramme zeigen sowohl niedrigere als auch höhere Potentialdifferenz, so daß der bis jetzt beobachtete Wert von circa 10 mV/m abgedeckt ist.

3. Zur Stabilität

3.1 Vorbetrachtungen

Die in Teil 2 berechneten stationären Zustände sind eindimensionale Bernstein-Greene-Kruskal-Gleichgewichtszustände, welche nichtlinearen Lösungen des Vlasov-Poisson-Gleichungssystems entsprechen. Aussagen über die Stabilität werden - von Ausnahmen abgesehen - dadurch erschwert, daß die Gleichgewichtslösungen räumlich inhomogen sind. Eine Normalmoden-Analyse, die Stabilitätsbedingungen wie z.B. das Penrose-Kriterium für homogene Gleichgewichte liefert, wird im inhomogenen Fall dadurch erschwert, daß die Normalmoden Lösungen einer Integralgleichung mit sehr kompliziertem Kern sind, die mit Hilfe von Näherungsverfahren bestimmt werden müssen (z.B. Schamel, 1983).

Eine Aussage über das Stabilitätsverhalten eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems, ohne Kenntnis der Lösungen des Systems, liefert das Lyapunov-Verfahren (Hahn, 1967; Leipholz, 1968).

Bei der direkten Methode von Lyapunov wird die Stabilitätsanalyse im Falle von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Hilfe der Lyapunov-Funktion durchgeführt. Gelingt es, eine solche Funktion zu konstruieren, so ergeben sich Aussagen über die Stabilität des Systems. Im Falle partieller Differentialgleichungen ist ein Lyapunov-Funktional zu konstruieren.

Obwohl sich für stabile Systeme die Existenz einer Lyapunov-Funktion unter sehr allgemeinen Bedingungen mathematisch beweisen läßt, existiert kein generelles Konstruktionsverfahren für sie. Für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich spezielle Konstruktionsverfahren für bestimmte Probleme anwenden (La Salle und Lefschetz, 1967: S. 75; Hahn, 1967: S. 115). Für Systeme von partiellen Differentialgleichungen lassen sich nur in ganz speziellen Fällen Lyapunov-Funktionale konstruieren (Zubov, 1955: S. 235; Hahn, 1967: S. 115). Für bestimmte elektromagnetische Phänomene in stoßfreien Plasmen wurden Lyapunov-Verfahren bereits erfolgreich angewandt (Schindler, 1966; Schindler et al., 1973 und Schindler, 1974).

In den folgenden Kapiteln wird das Lyapunov-Verfahren angewandt, um das Stabilitätsverhalten eines einfachen Bernstein-Greene-Kruskal-(BGK)-Gleichgewichtes zu analysieren.

3.2 Das dynamische Modell

Im folgenden soll der Fall eines eindimensionalen Systems von zwei Teilchenströmen mit elektrischem Feld behandelt werden. Die Teilchen sind Elektronen $s = e$ und einfach geladene Ionen $s \doteq i$ mit einer Verteilungsfunktion $f_s \sim \delta(v_s - v_s')$ für die Geschwindigkeit v_s.

Hierbei ist es möglich, das Plasma durch ein System von gekoppelten nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen zu beschreiben. Die positive Richtung der x-Achse soll in Richtung der Elektronengeschwindigkeit zeigen.

Die Grundgleichungen für das zeitabhängige Problem sind:

die Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e) = 0 \qquad (3\text{-}1a)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = 0 \qquad (3\text{-}1b)$$

die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} v_e^2 + \frac{e}{m_e} E = 0 \qquad (3\text{-}1c)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} v_i^2 - \frac{e}{m_i} E = 0 \qquad (3\text{-}1d)$$

die Poisson-Gleichung:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_i - n_e) \qquad (3\text{-}1e)$$

wobei m die Masse, E das elektrische Feld, v die Geschwindigkeit und n die Teilchendichte sind. Das BGK-Gleichgewicht wird durch die zeitunabhängige Lösung der Gleichungen (3-1) beschrieben. Die Gl. (3-1) sollen mit den Ansätzen

$$n_s(x,t) = \bar{n}_s(x) + \tilde{n}_s(x,t) \; ; \; \tilde{n}_s \ll \bar{n}_s \qquad (3\text{-}2a)$$

$$v_s(x,t) = \bar{v}_s(x) + \tilde{v}_s(x,t) \; ; \; \tilde{v}_s \ll \bar{v}_s \qquad (3\text{-}2b)$$

$$E(x,t) = \bar{E}(x) + \tilde{E}(x,t) \; ; \; \tilde{E} \ll \bar{E} \qquad (3\text{-}2c)$$

und unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung linearisiert werden. $\bar{n}_s$, $\bar{v}_s$ und $\bar{E}$ sind Lösungen des zeitunabhängigen BGK-Problems. Die Linearisierung ergibt

$$\dot{\tilde{n}}_e + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_e \tilde{n}_e + \bar{n}_e \tilde{v}_e) = 0 \tag{3-3a}$$

$$\dot{\tilde{v}}_e + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_e \tilde{v}_e) + \frac{e}{m_e}\tilde{E} = 0 \tag{3-3b}$$

$$\dot{\tilde{n}}_i + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_i \tilde{n}_i + \bar{n}_i \tilde{v}_i) = 0 \tag{3-3c}$$

$$\dot{\tilde{v}}_i + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_i \tilde{v}_i) - \frac{e}{m_i} E = 0 \tag{3-3d}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = 4\pi e(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e) \tag{3-3e}$$

wobei der Punkt die partielle Ableitung nach der Zeit bezeichnet.

Aus Gl. (3-3e) erhält man

$$\tilde{n}_e = \tilde{n}_i - \frac{1}{4\pi e}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \tag{3-4}$$

Nach Einsetzen von Gl. (3-4) und deren Zeitableitung in die Gl. (3-3a) ergibt sich

$$\dot{\tilde{n}}_i - \frac{1}{4\pi e}\frac{\partial \dot{\tilde{E}}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_e n_i) - \frac{1}{4\pi e}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{v}_e \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{n}_e \tilde{v}_e) = 0 \tag{3-5}$$

Aus Gl. (3-3c) entnehmen wir n_i und setzen diesen Ausdruck in die Gl. (3-5) ein. Damit folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{1}{4\pi e}\dot{\tilde{E}} + \frac{1}{4\pi e}\bar{V}_e\frac{\partial\tilde{E}}{\partial x} - \bar{n}_e\tilde{V}_e - (\bar{V}_e-\bar{V}_i)\tilde{n}_i + \bar{n}_i\tilde{V}_i\Big] = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

Nach Integration der Gl. (3-6) vom Rand R_o bis zu einem Punkt x und unter der Annahme, daß die Störungen am Rand R_o verschwinden,

$$\frac{1}{4\pi e}\dot{\tilde{E}} + \frac{1}{4\pi e}\bar{V}_e\frac{\partial\tilde{E}}{\partial x} - \bar{n}_e\tilde{V}_e - (\bar{V}_e-\bar{V}_i)\tilde{n}_i + \bar{n}_i\tilde{V}_i\Big|_{R_o} = 0 \qquad (3\text{-}7)$$

wird das System von partiellen Differentialgleichungen:

$$\dot{\tilde{E}} + \bar{V}_e\frac{\partial\tilde{E}}{\partial x} - 4\pi e\bar{n}_e\tilde{V}_e - 4\pi e(\bar{V}_e-\bar{V}_i)\tilde{n}_i + 4\pi e\bar{n}_i\tilde{V}_i = 0 \qquad (3\text{-}8a)$$

$$\dot{\tilde{V}}_e + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}_e\tilde{V}_e) + \frac{e}{m_e}E = 0 \qquad (3\text{-}8b)$$

$$\dot{\tilde{n}}_i + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}_i\tilde{n}_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{n}_i\tilde{V}_i) = 0 \qquad (3\text{-}8c)$$

$$\dot{\tilde{V}}_i + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}_i\tilde{V}_i) - \frac{e}{m_i}\tilde{E} = 0 \qquad (3\text{-}8d)$$

Das Gleichungssystem läßt sich dimensionslos und in Matrixform so schreiben:

$$\begin{pmatrix}\dot{\epsilon}\\ \dot{\hat{V}}_e\\ \dot{\hat{n}}_i\\ \dot{\hat{V}}_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_eD & N_e & \delta u & -N_i\\ -1 & -Du_e & 0 & 0\\ 0 & 0 & -Du_i & -DN_i\\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & -Du_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon\\ \hat{V}_e\\ \hat{n}_i\\ \hat{V}_i\end{pmatrix} \qquad (3\text{-}9)$$

wobei gilt

$$x = \hat{x}\, L$$
$$t = \hat{t}\, T$$
$$\tilde{V}_e(x,t) = V_o\, \hat{v}_e(x,t)$$
$$\bar{V}_e(x) = V_o\, U_e(x)$$
$$\tilde{V}_i(x,t) = V_o\, \hat{v}_i(x,t)$$
$$\bar{V}_i(x) = V_o\, U_i(x)$$
$$\bar{n}_e(x) = N_o\, N_e(x)$$
$$\tilde{n}_i(x,t) = N_o\, \hat{n}_i(x,t)$$
$$\bar{n}_i(x) = N_o N_i(x)$$
$$\tilde{E}(x,t) = E_o\, \epsilon(x,t)$$
$$\alpha = m_e/m_i$$
$$\delta U = U_e - U_i$$

Ferner ist D der Operator $\partial/\partial\hat{x}$, der Punkt bedeutet jetzt Zeitableitung nach $\hat{t}$, und die charakteristischen Größen L, T, V_o, N_o, E_o erfüllen folgende Normierungsbedingungen:

$$V_o T/L = 1$$
$$4\pi e N_o V_o T/E_o = 1$$
$$e E_o T/m_e V_o = 1 .$$

Die Gleichung (3-9) läßt sich abgekürzt schreiben

$$\dot{\varphi} = Q\varphi \qquad (3\text{-}10)$$

wobei die Elemente des Vektors φ die Störungen ϵ, $\hat{v}_e$, $\hat{n}_i$ und $\hat{v}_i$ sind. Die Matrix Q enthält neben Funktionen auch den Differentialoperator D. Q ist also ein zeitunabhängiger linearer Operator, der durch Gl. (3-9) näher erklärt ist.

3.3 Das Lyapunov-Verfahren nach Fowler

In den meisten bekannten Fällen von Anwendungen des Lyapunov-Verfahrens repräsentiert (3-10) ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Brauer und Nohel, 1969; Jordan und Smith, 1977; Siljak, 1969). Das bedeutet, daß die Elemente der Matrix Q entweder Konstanten oder Funktionen von Gleichgewichtsgrößen sind. In unserem Fall liegt ein Differentialgleichungssystem vor, was dazu führt, daß die Matrix Q auch Operatoren enthält. Das erfordert eine Verallgemeinerung des Lyapunov-Verfahrens.

Fowler (1963) hat das Lyapunov-Verfahren erweitert, damit die Gleichungen, die eine Plasma beschreiben, analysiert werden können. Er betrachtete die Konstruktion von Lyapunov-Funktionen als Integral von quadratischen Formen in φ mit Hilfe eines hermitischen Operators H. Im folgenden soll bezüglich des Systems (3-10) eine Zusammenfassung einiger wichtiger Ergebnisse von Fowler gegeben werden:

Dazu wird ein Skalarprodukt für reelle Funktionen (φ, ψ) eingeführt, das für unsere Anwendung die Form $(\varphi, \psi) = \int_{R_0}^{R_1} \varphi \psi \, dx$ annehmen soll. Dabei bilden φ und ψ Elemente eines geeigneten Funktionsraums S, so daß die Funktionen in den Randpunkten des Integrationsgebietes verschwinden. Die Funktionen φ und ψ sind genügend glatt, so daß alle vorhandenen Differentialquotienten stetig sind. $\mathfrak{H}$ sei die Menge von allen hermitischen, positiv definiten linearen zeitunabhängigen Operatoren, die auf S wirken.

Satz: Das Skalarprodukt $(\varphi(t), \varphi(t))$ ist beschränkt für $t \geq 0$ für alle $\varphi \in S$, wenn ein positiv definites $H \in \xi$ existiert, so daß $[HQ + Q^{+}H]$ negativ semi-definit ist.

Die Zeitableitung von $(\varphi, H\varphi)$ ist

$$\frac{d}{dt}(\varphi, H\varphi) = (\varphi, [HQ + Q^{+}H]\varphi) \tag{3-11}$$

Wenn H die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so daß die rechte Seite von (3-11) negativ semi-definit ist, dann ist $(\varphi, H\varphi)$ für alle Zeiten beschränkt. Wegen der Definitheit von H existiert eine feste Zahl $\delta > 0$, so daß $(\varphi,\varphi) \leq \delta^{-1}(\varphi, H\varphi)$. Da (φ,φ) auch beschränkt ist, folgt Stabilität und $(\varphi, H\varphi)$ ist ein Lyapunov-Funktional.

Es ist instruktiv, zeitlich gedämpfte Störungen zu betrachten. $\varphi \in S$ sei eine solche Störung, und $B \in \xi$ sei ein beschränkter Operator. Angenommen, es gilt:

$$\int_0^\infty (\varphi, \varphi)\, dt < \infty$$

dann konvergiert das folgendermaßen definierte Integral:

$$I(t) := \int_t^\infty \left(\varphi(t'), B\,\varphi(t')\right) dt' \tag{3-12}$$

I(t) hat dann die Eigenschaften eines Lyapunov-Funktionals, weil I(t) positiv ist, weil B positiv und verschieden von Null ist und $dI/dt < 0$ ist. Wenn wir den Zeitentwicklungsoperator T benutzen, dann können wir für $\varphi(t)$ schreiben

$$\varphi(t) = T(t)\,\varphi(0)$$

wobei $T(t+\tau) = T(t)T(\tau)$ ist. Mit dieser Eigenschaft ist

$$\varphi(t') = T(t'-t)\,T(t)\,\varphi(0) = T(t'-t)\,\varphi(t) .$$

Gl. (3-12) läßt sich schreiben

$$I(t) = \int_t^\infty \left(T(t'-t)\,\varphi(t),\, B\,T(t'-t)\,\varphi(t)\right) dt' \qquad (3\text{-}13)$$

Die Variablentransformation $\tau = t' - t$ erlaubt uns (3-13) zu schreiben als

$$I(t) = \int_0^\infty \left(T(\tau)\,\varphi(t),\, B\,T(\tau)\,\varphi(t)\right) d\tau \qquad (3\text{-}14)$$

Durch Vertauschen von Integration und Skalarprodukt kann man für Gl. (3-14) schreiben

$$I(t) = \left(\varphi(t),\, H\,\varphi(t)\right) \qquad (3\text{-}15)$$

wobei H durch

$$H = \int_0^\infty T^+(\tau)\,B\,T(\tau)\,d\tau \qquad (3\text{-}16)$$

definiert wird.

Wenn H Definitheitscharakter besitzt, kann man $(\varphi, H\varphi)$ als Lyapunov-Funktional verwenden. Es ist interessant zu bemerken, daß ein System, daß im Sinne von Fowler stabil ist, immer ein Lyapunov-Funktional besitzt. Hierbei ist zu beachten, daß dieser Schluß für Schwingungen mit konstanter Amplitude nicht gilt.

3.4 Der Fall ohne Ionen-Störungen

Im folgenden werden die Stabilitätseigenschaften eines ein-

dimensionalen Stroms untersucht. In dem hier behandelten nicht-homogenen Fall besteht der Strom in positiver x-Richtung aus Elektronen, während die Ionen ruhen. Für die Ionen im Hintergrund wird keine Störung zugelassen. Die Ionendichte $N_i(x)$ ist eine beliebige Funktion von x. Das Problem wird durch die Gleichungen (3-1a), (3-1c) und

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(N_i - n_e) \tag{3-18}$$

beschrieben. Nach der Linearisierung (3-2) und Variableneliminination

$$\tilde{n}_e = -\frac{1}{4\pi e}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \tag{3-19}$$

kann man die Feldgleichung schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4\pi e}\dot{\tilde{E}} + \frac{1}{4\pi e}\bar{v}_e\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} - \bar{n}_e\tilde{v}_e\right] = 0 \tag{3-20}$$

Dieses Resultat kann man direkt aus Gl. (3-6) erhalten, wenn man $\bar{v}_i = \tilde{v}_i = 0$ setzt. Die Randbedingung (3-7) wird

$$\dot{\tilde{E}} - 4\pi e(\bar{v}_e\tilde{n}_e + \bar{n}_e\tilde{v}_e)\big|_{R_0} = 0 \tag{3-21}$$

und Gl. (3-9) schreibt sich jetzt als

$$\begin{pmatrix}\dot{\epsilon}\\ \dot{\hat{v}}_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_e D & N_e\\ -1 & -Du_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon\\ \hat{v}_e\end{pmatrix} \tag{3-22}$$

Entsprechend Gl. (3-10) ist die Matrix Q

$$Q = \begin{pmatrix}-u_e D & N_e\\ -1 & -Du_e\end{pmatrix} \tag{3-23}$$

und daraus wird der hermitisch konjugierte Operator Q^+

$$Q^+ = \begin{pmatrix}Du_e & -1\\ N_e & u_e D\end{pmatrix} \tag{3-24}$$

mit der Bedingung, daß die Störungen an beiden Integrationsgrenzen verschwinden, berechnet. Damit wird die Randbedingung (3-21) automatisch erfüllt.

Als Lyapunov-Funktional benutzen wir $P = (\varphi, H\varphi)$ mit Zeitableitung $\dot{P} = (\varphi, [HQ + Q^{+}H]\varphi)$, und für eine Aussage über die Stabilität wird das Vorzeichen von $\dot{P}$ untersucht. Für H wird der Ansatz gemacht, daß H eine diagonale Matrix ist, deren Elemente Funktionen von x sind:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}, \quad h_{ii} > 0 \tag{3-25}$$

Damit ist H in (3-25) linear, hermitisch, positiv definit und zeitunabhängig.

Wir definieren

$$F := Q^{+}H + HQ = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \tag{3-26}$$

und wegen der quadratischen Form $\dot{P} = (\varphi, F\varphi)$ hängt das Vorzeichen von $\dot{P}$ allein von der Definitheitseigenschaft der Matrix F ab.

Die Bedingung für Stabilität ist dann, daß die Matrix F negativ definit ist. Eine äquivalente Stabilitätsbedingung ist die, daß -F positiv definit ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} -u_e' h_{11} - u_e h_{11}' & -N_e h_{11} + h_{22} \\ -N_e h_{11} + h_{22} & -u_e h_{22}' + h_{22} u_e' \end{pmatrix} \quad \text{positiv definit} \tag{3-27}$$

wobei der Strich hier wie auch im folgenden Ableitung nach x bezeichnet. Wenn wir

$$N_e h_{11} - h_{22} = 0 \tag{3-28}$$

setzen, ist die Matrix F positiv definit (Lancaster, 1969: S. 96), wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden

$$f_{11} \geq 0 \tag{3-29a}$$

$$f_{22} \geq 0 \tag{3-29b}$$

Die Bedingung (3-29a)

$$-(u_e h_{11})' \geq 0 \tag{3-30}$$

läßt sich als

$$-(u_e h_{11})' = g \tag{3-31}$$

schreiben, wobei g eine beliebige positiv definite Funktion von x sein kann. Statt einer expliziten x-Abhängigkeit für g ist es zweckmäßg, eine implizite Abhängigkeit von x zu wählen,

$$-(u_e h_{11})' = g(u_e h_{11}) \tag{3-32}$$

Da U_e (s. Kapitel 3.2) und h_{11} definitionsgemäß positiv definit sind, genügt es, für den hier behandelten Fall

$$g(u_e h_{11}) = k\, u_e h_{11} \tag{3-33}$$

anzunehmen, wobei k eine beliebige positive Konstante ist.

Mit dieser Annahme liefert die Integration von Gl. (3-32) zwischen Rand R_o und x

$$h_{11} = C u_e^{-1} e^{-kx} \tag{3-34}$$

wobei

$$C = u_e h_{11}|_{R_o} \tag{3-35}$$

eine positive Integrationskonstante ist. Die Bedingung (3-29b) mit Verwendung von (3-28) und (3-34) wird

$$-u_e (C N_e u_e^{-1} e^{-kx})' + C N_e u_e^{-1} e^{-kx} u_e' \geq 0 \tag{3-36}$$

und nach kurzer Umformung erhält man mit der Gleichgewichtsbedingung $U_e N_e$ = const.

$$u_e^{-1} u_e' \geq -k/3 \tag{3-37}$$

Ungleichung (3-37) ist die zu erfüllende Stabilitätsbedingung. Da es immer ein k gibt, das diese Bedingung erfüllt, ist das Gleichgewicht stabil. Man kann jetzt explizit nachprüfen, daß H die notwendigen Eigenschaften besitzt. Mit der Beziehung (3-28) und dem Resultat (3-34) läßt sich die Matrix H aus (3-25)

$$H = \begin{pmatrix} 1/u_e & 0 \\ 0 & N_e/u_e \end{pmatrix} C e^{-kx} \tag{3-38}$$

schreiben. H in (3-38) ist hermitisch, positiv definit und zeitunabhängig.

Als weitere Nachprüfung untersuchen wir direkt das Verhalten

der Zeitableitung des Lyapunov-Funktionals:

$$\dot{P} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^{R_1} C u_e^{-1} e^{-kx} \begin{pmatrix} \epsilon & \hat{v}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \hat{v}_e \end{pmatrix} dx \qquad (3\text{-}39)$$

Nachdem die Produktoperation und die Zeitableitung durchgeführt wurden, läßt sich (3-39) schreiben als

$$\dot{P} = 2\int_{R_0}^{R_1} C u_e^{-1} e^{-kx} (\epsilon\dot{\epsilon} + N_e \hat{v}_e \dot{\hat{v}}_e)\, dx \qquad (3\text{-}40)$$

Mit $\dot{\epsilon}$ und $\dot{\hat{v}}_e$ aus (3-22) erhält man für $\dot{P}$

$$\dot{P} = 2C\int_{R_0}^{R_1} e^{-kx}\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) - N_e u_e^{-1}\hat{v}_e \frac{d}{dx}(u_e \hat{v}_e)\right] dx \qquad (3\text{-}41)$$

Nach partieller Integration erhalten wir

$$\dot{P} = -2Ck\int_{R_0}^{R_1} e^{-kx}\frac{\epsilon^2}{2}\, dx - 2C\int_{R_0}^{R_1} N_e \frac{\hat{v}_e^2}{2} e^{-kx}\left(k + \frac{3u_e'}{u_e}\right) dx \qquad (3\text{-}42)$$

Der erste Term in (3-42) ist immer negativ. Der zweite Term ist ebenfalls negativ, da aus (3-37) folgt, daß der Ausdruck $k + 3U_e'/U_e$ positiv ist. Damit ist $\dot{P} < 0$ und die Stabilität ist nachgeprüft.

Eine hinreichende Stabilitätsbedingung für das Problem eines Elektronenstroms mit ruhenden ungestörten Ionen im Hintergrund liefert auch die Mode-Analyse (Infeld 1972; Infeld und Rowlands, 1973).

Bei der Normalmode-Analyse muß man berücksichtigen, daß sie nur hinreichende Stabilitätsbedingungen für ein System liefern kann, wenn der Operator dieses Systems ein vollständiges System von Eigenfunktionen hat.

Nur für eine solche Klasse von Operatoren kann garantiert werden, daß die Entwicklung nach Eigenfunktionen alle Anfangsbedingungen erfaßt. Der Beweis der Vollständigkeit von Operatoren ist aber ein schwieriges Problem (Case, 1959), besonders im Fall nicht selbst-adjungierter Operatoren wie in unserem Fall.

Bei der Anwendung des Lyapunov-Verfahrens wird man nicht mit diesem Problem konfrontiert, da keine Entwicklung nach Eigenfunktionen gemacht wird, so daß alle Störungen mitberücksichtigt werden.

Ein anderer Vorteil der Lyapunov-Methode ist, daß man die explizite Gleichgewichtslösung nicht braucht: die aus der Methode gewonnene Stabilitätsaussage bezieht sich auf kein bestimmtes Gleichgewicht, sondern gilt für alle Lösungen des Systems.

3.5 Der Fall mit Ionen-Störungen

3.5.1 Formulierung

Das im vorigen Kapitel geschilderte Lyapunov-Verfahren lieferte zwar ein hinreichendes Stabilitätskriterium für den Zwei-Strom-Fall, gilt aber nur für Störungen, die die Ionen unbeeinflußt lassen. In diesem Kapitel sollen daher die

Möglichkeiten und Grenzen des Lyapunov-Verfahrens untersucht werden, eine Stabilitätsaussage für den Fall mit Störungen der Ionen zu liefern.

Das Gleichungssystem (3-9) beschreibt das linearisierte gestörte Problem. Mit der Annahme, daß die Störungen auf beiden Grenzen des endlich großen Zwei-Strom-Systems verschwinden, erhalten wir für die hermitisch konjugierte Form von Q

$$Q^{+} = \begin{pmatrix} DU_e & -1 & 0 & \alpha \\ N_e & U_e D & 0 & 0 \\ \delta U & 0 & U_i D & 0 \\ -N_i & 0 & N_i D & U_i D \end{pmatrix} \tag{3-43}$$

Für den Operator H wählen wir eine symmetrische Matrix, deren Elemente nur reelle Funktionen (also keine Differentialoperatoren) enthalten.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & h_{34} \\ h_{14} & h_{24} & h_{34} & h_{44} \end{pmatrix} \tag{3-44}$$

Die a posteriori Nachprüfung der positiven Definitheitseigenschaft von H kann man im Fall einer symmetrischen Matrix sparen, wenn man für H die Dreieckszerlegung nach Cholesky (Thompson, 1969; Stoer, 1979) verwendet

$$H = LL^{+} \tag{3-45}$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{12} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{14} & \ell_{24} & \ell_{34} & \ell_{44} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

ist. H ist nun a priori positiv definit. Falls L reell ist, ist die Matrix H auch reell. Die für dieses Problem entsprechende Matrix F aus (3-26) ist:

$$F = \begin{pmatrix} DUeh_{11} - h_{11}U_eD \\ -2h_{12} - 2\bar{\alpha}h_{14} & DUeh_{12} - h_{12}DU_e \\ & +h_{11}Ne - h_{22} \\ & +\bar{\alpha}h_{24} & DUeh_{13} - h_{13}DU_i \\ & & +h_{11}\delta U - h_{23} \\ & & +\bar{\alpha}h_{34} & DUeh_{14} - h_{14}DU_i \\ & & & -h_{13}DN_i - N_i h_{11} \\ & & & -h_{24} + \bar{\alpha}h_{44} \\ U_eDh_{12} - h_{12}U_eD & U_eDh_{22} - h_{22}DU_e & U_eDh_{23} - h_{23}DU_i & U_eDh_{24} - h_{24}DU_i \\ +Neh_{11} - h_{22} & +2Neh_{12} & +h_{12}\delta U + Neh_{13} & -h_{23}DN_i + Neh_{14} \\ +\bar{\alpha}h_{24} & & & -h_{12}N_i \\ U_iDh_{13} - h_{13}U_eD & U_iDh_{23} - h_{23}DU_e & U_iDh_{33} - h_{33}DU_i & U_iDh_{34} - h_{34}DU_i \\ +\delta U h_{11} - h_{23} & +h_{13}Ne + \delta U h_{12} & +2h_{13}\delta U & -h_{33}DN_i - N_i h_{13} \\ +\bar{\alpha}h_{34} & & & +\delta U h_{14} \\ U_iDh_{14} - h_{44}U_eD & U_iDh_{24} - h_{24}DU_e & U_iDh_{34} - h_{34}DU_i & U_iDh_{44} - h_{44}DU_i \\ +N_iDh_{13} - N_i h_{11} & +N_iDh_{23} + Neh_{14} & +N_iDh_{33} + h_{14}\delta U & +N_iDh_{34} - h_{34}DN_i \\ -h_{24} + \bar{\alpha}h_{44} & -N_i h_{12} & -N_i h_{13} & -2N_i h_{14} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}47)$$

Durch Unterteilung von F

$$F = \left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline B^+ & C \end{array}\right]$$

definieren wir drei 2x2-Matrizen A, B und C. Mit entsprechender Unterteilung für den Vektor ψ läßt sich die zeitliche Ableitung von P schreiben als

$$\dot{P} = \int_{R_0}^{R_1} (\psi_1 \; \psi_2) \begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} dx \qquad (3\text{-}48)$$

Von den drei Untermatrizen sind A und C hermitisch. Ferner enthält A keinen auf ψ wirkenden Differentialoperator, weil der Term mit D ein Kommutator $[D, f(x)]$ ist und sich so die Wirkung des Operators D auf ψ aufhebt. Das ist nicht der Fall bei allen Elementen der Untermatrizen B und C. Die Gl. (3-48) läßt sich nun schreiben als Funktion von ψ_1 und ψ_2:

$$\dot{P}\{\psi_1, \psi_2\} = (\psi_1, A\psi_1) + (\psi_1, B\psi_2) + (\psi_2, B^+\psi_1) + (\psi_2, C\psi_2) \qquad (3\text{-}49)$$

Um die Definitheit von P zu analysieren, untersuchen wir, unter welcher Bedingung gleichzeitig gilt

a) $\dot{P}$ hat ein Extremum $\dot{P}_E$

b) $\dot{P}_E$ ist negativ semidefinit.

Wenn das Extremum ein Maximum ist, dann ist P für alle ψ_1, ψ_2 negativ semidefinit.

Wegen der zweifachen Ahängigkeit von $\dot{P}$ führen wir eine Extremalisierung in ψ_1 mit festem ψ_2 durch, und danach analysieren wir die Definitheit von $\dot{P}$ in Abhängigkeit von ψ_2 allein. Mit

$$\psi_1 \rightarrow \psi_1 + \delta\psi_1$$

läßt sich die erste Variation von $\dot{P}$

$$\delta\dot{P} = \dot{P}\{\psi_1 + \delta\psi_1, \psi_2\} - \dot{P}\{\psi_1, \psi_2\}$$

schreiben als

$$\delta\dot{P} = (\psi_1, A\delta\psi_1) + (\delta\psi_1, A\psi_1) + (\delta\psi_1, B\psi_2) + (\psi_2, B^+\delta\psi_1) . \quad (3\text{-}50)$$

Da die Integrale in (3-50) reell sind, erhalten wir

$$\delta\dot{P} = 2(\delta\psi_1, [A\psi_1 + B\psi_2]) \quad (3\text{-}51)$$

Die Extremalisierung von $\dot{P}\{\psi_1\}$ liefert die Bedingung

$$\psi_1 = -A^{-1}B\psi_2 \quad (3\text{-}52)$$

wobei A eine Inverse haben muß. Setzen wir ψ_1 von (3-52) in (3-48) ein, so erhalten wir für das extremalisierte $\dot{P}$

$$\dot{P}_E\{\psi_2\} = (B\psi_2, [-A^{-1}]B\psi_2) + (\psi_2, C\psi_2) \quad (3\text{-}53)$$

Damit es sich bei der Extremalisierung von $\dot{P}\{\psi_1\}$ um ein Maximum handelt, muß die zweite Variation von $P\{\psi_1\}$

$$\delta^2\dot{P} = (\delta\psi_1, A\delta\psi_1)$$

negativ sein, was erfordert, daß A negativ definit ist. Eine Aussage über Stabilität ist mit Hilfe von (3-53) noch nicht möglich. Der Grund dafür ist in erster Linie der Term mit A^{-1}, wie wir sehen werden.

3.5.2 Analyse der Definitheit von $\dot{P}$

Um die Definitheitseigenschaften von $\dot{P}$ in (3-53) besser zu verstehen, entwickeln wir diese Gleichung weiter.

Man kann die Operatoren B und C als

$$B = \alpha D + \beta \tag{3-54a}$$

$$C = \Theta D + \Omega \tag{3-54b}$$

schreiben, wobei α, β, Θ und Ω Matrizen sind, deren Elemente nur Funktionen enthalten. Mit Hilfe von (3-54) läßt sich (3-53) schreiben als

$$\dot{p}_E = T_1 + T_2 \tag{3-55}$$

wobei

$$T_1 = -\left(\psi_2', \alpha^+ A^{-1} \alpha \psi_2'\right) \tag{3-56}$$

$$T_2 = \left(\psi_2, \left[\Omega + (\beta^+ A^{-1}\alpha)' - \beta^+ A^{-1}\beta - \Theta'/2\right]\psi_2\right) \tag{3-57}$$

sind.

Man sieht schon ohne weitere Rechnung, daß bei dem Versuch, $\dot{P}_E$ negativ definit zu machen, folgende Schwierigkeit auftreten wird: Wählt man die x-Abhängigkeit der Testfunktion ψ_2 so, daß ψ_2 mit der charakteristischen Länge b genügend stark variiert, so wird der erste Term dominieren und daher das Vorzeichen von $\dot{P}_E$ bestimmen.

Der erste Term ist jedoch positiv. Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Tatsache, daß A und damit A^{-1} negativ definit sind und die Transformation $\alpha^+ A^{-1} \alpha$ hieran nichts ändert.

Für eine genauere Analyse gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst betrachten wir:

Fall 1: Die Matrix

$$\Gamma_{mn} := -(\alpha^{+} A^{-1} \alpha)_{mn} \tag{3-58}$$

verschwindet nicht identisch. Es gibt also einen Punkt x_o, für den

$$\sum_{mn} \varphi_m(x_o)\, \Gamma_{mn}(x_o)\, \varphi_n(x_o) > 0 \quad , \quad \text{falls } \varphi_n(x_o) \neq 0$$

Als Testfunktion wählen wir

$$\tilde{\varphi}_m = \hat{\varphi}_m \left[\frac{1}{b}\, e^{-(x-x_o)/2b^2} \right]^{1/2} \quad , \quad \hat{\varphi}_m = \text{const} \tag{3-59}$$

Hiermit ergibt sich für (3-55)

$$\dot{P}_E\{\psi_2\} = \frac{\pi\kappa}{b^2} \sum_{mn} \hat{\varphi}_m\, \Gamma_{mn}(x_o)\, \hat{\varphi}_n + \theta(b^0) \tag{3-60}$$

Es gibt also immer eine Testfunktion, die $\dot{P}_E$ positiv macht. Daher scheidet für den hier betrachteten Fall P als Lyapunov-Funktional aus.

Fall 2: α verschwindet identisch. Dann muß gelten

$$\alpha_{11} = h_{13}\, \delta\mu = 0 \tag{3-61a}$$

$$\alpha_{12} = h_{14}\, \delta\mu - h_{13} N_i = 0 \tag{3-61b}$$

$$\alpha_{21} = h_{23}\, \delta\mu = 0 \tag{3-61c}$$

$$\alpha_{22} = h_{24}\, \delta\mu - h_{23} N_i = 0 \tag{3-61d}$$

In diesem Fall schreibt sich $\dot{P}_E$

$$\dot{P}_E\{\psi_2\} = \int_{R_0}^{R_1} \left[-A_{11}^{-1}/\beta_{11}^2 \varphi_3^2 - \left(A_{22}^{-1}/\beta_{22}^2 - \Omega_{22} \right) \right] dx \qquad (3\text{-}62)$$

wobei

$$A_{11} = (u_i h_{11})' \qquad (3\text{-}63a)$$

$$A_{22} = u_e^2 (h_{22}/u_e)' \qquad (3\text{-}63b)$$

$$\beta_{11} = h_{11}\, \delta u \qquad (3\text{-}63c)$$

$$\beta_{22} = u_e^2 (h_{24}/u_e)' \qquad (3\text{-}63d)$$

$$\Omega_{22} = u_i^2 (h_{44}/u_i)' \qquad (3\text{-}63e)$$

Die Bedingung (3-61) liefert entweder

$$\text{I)} \quad h_{13} = h_{14} = h_{23} = h_{24}$$

oder $\quad$ II) $\quad \delta u = 0$

Aus (3-62) verlangt die Definitheit von $\dot{P}_E$, daß der erste Term verschwindet. Da die Existenz von A_{11}^{-1} $h_{11} = 0$ verbietet, muß also $\delta U = 0$ sein, und $\dot{P}_E$ lautet

$$\dot{P}_E \{\varphi_4\} = \int_{R_0}^{R_1} \left(-A_{22}^{-1} \beta_{22}^2 + \Omega_{22} \right) dx \qquad (3\text{-}64)$$

Für konstantes h_{24} und h_{44} erhalten wir mit Hilfe von (3-63d) und (3-63e)

$$\dot{P}_E\{\varphi_4\} = 0 \qquad (3\text{-}65)$$

und damit Stabilität. Dieser Fall entspricht einem homogenen Plasma, das für einen sich mit der Geschwindigkeit $v = U_e$ bewegenden Beobachter in Ruhe ist.

Für allgemeine Gleichgewichte ist es uns jedoch nicht gelungen, über Stabilität oder Instabilität des Systems zu entscheiden. Diese Schwierigkeiten sollen im nächsten Kapitel diskutiert werden.

3.6 Diskussion

In der obigen Stabilitätsanalyse haben wir angenommen, daß die Testfunktionenklasse für die Störungen unbeschränkt ist. Für eine solch allgemeine Klasse von Testfunktionen ist eine Aussage über Stabilität mit gestörten Ionen und Elektronen nach unserer Methode nicht möglich, wie in Kapitel 3.5 gezeigt wurde. Eine Einschränkung der Testfunktionenklasse ist möglich, wenn man Konstanten der Bewegung für die Störung einführt. Ob die damit verbundene Komplexität eine Aussage ermöglicht, bleibt offen.

Ein anderer Aspekt ist die behandelte enge Klasse von Lyapunov-Funktionalen. Die hier betrachtete Analyse wurde für nur eine Klasse von Lyapunov-Funktionalen gemacht, nämlich $(\varphi, H\varphi)$, wobei die Elemente der Matrix H nur Funktionen von x sind, also keine Operatoren enthalten. In den

meisten einfachen Fällen von Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügt es, diese Klasse von Lyapunov-Funktionen anzunehmen. Das ist gerade der Fall im Bereich der Regelungstechnik, wo das Lyapunov-Verfahren für die auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen am meisten in den letzten vierzig Jahren angewendet wurde. Diese Klasse von H ist noch für partielle Differentialgleichungssysteme geeignet, deren Matrix Q Differentialoperatoren nur in den diagonalen Termen besitzt. Das war bei ruhenden ungestörten Ionen der Fall.

Wenn wir Störungen der Ionen mit berücksichtigen, sehen wir beim Betrachten der Gl. (3-9), daß der Differentialoperator sowohl in der Diagonale als auch im Element q_{34} der Matrix Q auftaucht. Es ist gerade das unvermeidbare Auftreten des Operators D in q_{34} die Quelle aller Schwierigkeiten.

Ursprünglich war (3-9) ein System von fünf partiellen Differentialgleichungen, die aus (3-1) stammen. In diesem Fall hat man zwei außerdiagonale Terme in der 5x5-Matrix Q, die den Operator D haben. Diese Terme kommen aus den linearisierten Kontinuitätsgleichungen. Durch Substitution von n_e aus (3-4) war es möglich, einen von den zwei Termen zu eliminieren. Da eine weiter Elimination nicht möglich ist, bleibt in der jetzt 4x4-Matrix Q ein außerdiagonaler Term. Für dieses System von partiellen Differentialgleichungen erreicht das bis heute bekannte Konstruktionsverfahren für Lyapunov-Funktionale seine Grenze.

Man könnte vermuten, daß das System instabil ist und daß man deshalb kein Lyapunov-Funktional findet. Jedoch im Fall eines sehr kleinen Grundgebietes gilt näherungsweise der lokal homogene Fall, von dem bekannt ist, daß es für Wellenlängen kleiner als eine kritische Wellenlänge stabil ist. Da diese Stabilitätseigenschaft im Rahmen des hier verwandten Verfahrens nicht vorhanden ist, kann daher nicht ohne weiteres auf Instabilität geschlossen werden.

Daß der Schluß auf Instabilität hier nicht zwingend ist, wird klar, wenn man berücksichtigt, daß der Übergang zum homogenen Fall einer Entkopplung der Moden und einem Übergang zu Schwingungen mit konstanter Amplitude entspricht. Im Rahmen des hier angewandten Lyapunov-Verfahrens ergab sich keine Möglichkeit für eine Berücksichtigung von entkoppelten Untersystemen, weil man die Entkopplung nicht aus den Differentialgleichungen selbst ersehen kann. (In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß der in Abschnitt 3.3 diskutierte Satz im Falle zeitlich konstanter Amplituden die Existenz eines Lyapunov-Funktionals nicht garantiert.)

Es bleibt noch offen, Konstruktionsverfahren für Lyapunov-Funktional zu entwickeln, bei denen die Matrix H nicht nur Funktionen sondern auch Operatoren enthält, so daß die Matrix F Definitheit besitzt.

4. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die Existenz von eindimensionalen selbst-konsistenten stationären Lösungen für elektrische Potentialstrukturen längs eines statischen vorgegebenen räumlich variablen Magnetfeldes im Rahmen der stoßfreien Theorie untersucht. Außerdem wurde das Lyapunov-Verfahren für die Stabilitätsanalyse von BGK-Gleichgewichten angewandt.

Wir haben den Lösungsraum für das Gleichgewicht in drei Fällen untersucht: monoenergetische Teilchen und konstantes Magnetfeld, monoenergetische Teilchen und räumlich variables Magnetfeld und Teilchen mit ungeordneter Bewegung und räumlich variables Magnetfeld. Im Laufe der Untersuchungen haben wir gezeigt, daß bei Verletzung der Quasineutralitätsbedingung der Lösungsraum der Poisson-Gleichung in großem Maße erweitert wird, da die Quasineutralität eine starke Einschränkung für die Lösungsklasse bedeutet. Die angenommene Abweichung der Quasineutralität wird mit Hilfe von experimentellen Daten begründet. Die Gleichgewichtslösungen, mit Ausnahme der quasineutralen Lösung, zeigen eine oszillatorische Struktur für das elektrische Potential längs der Magnetfeldlinien. Es gelang, lokalisierte Strukturen für das elektrische Feld zu berechnen, die die in der erdnahen Magnetosphäre beobachteten Daten für das elektrische Feld von der Größenordnung von 100 mV/m sowie die erwarteten Potentialdifferenzen gut reproduzieren. Das Lösungsdiagramm zeigt, daß es möglich ist, Potentialstrukturen

mit großen Werten für das oszillatorische elektrische Feld zu finden, die - wie beobachtet - in eine quasineutrale Umgebung übergehen.

Die berechneten Beispiele weisen auch nach, daß es möglich ist, geeignete Lösungen ohne Teilchenreflexionen und Teilcheneinfang zu konstruieren.

Die Ergebnisse sind konsistent mit der Hypothese, daß die elektrostatischen Strukturen in der erdnahen Magnetosphäre als Anpassung des magnetosphärischen Potentials an die ionosphärischen Bedingungen verstanden werden können. Bezüglich der Stabilität haben wir die Methode von Lyapunov mit der Verallgemeinerung von Fowler (1963) im Hinblick auf eine Anwendung auf Probleme mit Teilchenstrom gewählt. Dazu wird ein Hilfsoperator H eingeführt. Mit diesem Verfahren gelang es, im Rahmen einer Näherung ohne Magnetfeld und mit monoenergetischen Teilchen zu zeigen, daß die Potentialstrukturen gegenüber Störungen ohne Ionendynamik stabil sind. Diese Störungen ohne Ionendynamik kann man als schnelle Moden interpretieren. Um zu klären, ob der in der Abb. 2-15 auftretende Umkehrpunkt einen physikalischen Stabilitätsübergang bedeutet, haben wir als Beispiel den Fall ohne Ionendynamik und ohne Magnetfeld im Rahmen der Bifurkationstheorie analysiert.

Bezüglich einer vollständigen Stabilitätsanalyse mit Ionendynamik ist es gelungen nachzuweisen, daß im Rahmen der

Klasse $h_{ik} = h_{ik}(X)$ für die Elemente des Matrixoperators H nur für den homogenen Fall ohne Relativbewegung zwischen Ionen und Elektronen ein Lyapunov-Funktional existiert. Wenn es ein Lyapunov-Funktional für ein nicht homogenes Plasmagleichgewicht gibt, muß der Hilfsoperator H von komplizierterer Struktur sein, z.B. könnte er dann Differentialoperatoren enthalten.

Literatur

Abramowitz, M.; Stegun, I.A.; 1972: Handbook of Mathematical Functions
Dover Publications, New York

Alfvén, H.; Fälthammar, C.-G.; 1963: Cosmical Electrodynamics
Oxford University Press, London

Alfvén, H.; 1981: Cosmic Plasma
D. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland

Anderson, H.R.; Vondrak, R.R.; 1975: Observations of Birkeland Currents at Auroral Latitudes
Rev. Geophys. Space Sci. 13, 243

Arnoldy, R.L.; 1974: Auroral Particle Precipitation and Birkeland Currents
Rev. Geophys. Space Sci. 12, 217

Bernstein, I.B.; Greene, F.M.; Kruskal, M.D.; 1957: Exact Nonlinear Plasma Oscillations
Phys. Rev. 108, 546

Block, L.P.; 1972: Potential Double Layers in the Ionosphere
Cosmic Electrodynamics 3, 349

Block, L.P.; 1975: Double Layers, in "Physics of Hot Plasmas in the Magnetosphere", edited by B. Hultquist and L. Stenflo
Plenum, New York

Block, L.P.; Fälthammar, C.-G.; 1976: Mechanismus that may Support Magnetic-Field-Aligned Electric Fields in the Magnetosphere
Ann. Geophys. 32, 161

Born, Max; 1925: Vorlesung über Atommechanik, Band 1
Springer Verlag, Berlin

Brauer, F.; Nohel, J.A.; 1969: Qualitativ Theory of Ordinary Differential Equations
Benjamin, New York

Carlqvist, P.; Boström, R.; 1970: Space-Charge Region above the Aurora
J. Geophys. Res. 75, 7140

Case, K.M.; 1959: Plasma Oscillations
Annals of Physics 7, 349

Chamberlain, J.W.; 1961: Physics of the Aurora and Airglow
Academic Press, New York

Chen, F.F.; 1974: Introduction to Plasma Physics
Plenum Press, New York

Chiu, Y.T.; Corwall, J.M; 1980: Electrostatic Model of a Quiet Auroral Arc
J. Geophys. Res. 85, 543

Delobeau, F.; 1971: The Environment of the Earth
D. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland

Ecker, G.; 1972: Theory of Fully Ionized Plasmas
Academic Press, New York

Ehrenfest, P.; 1961: On adiabatic Changes of a System in Connection with the Quantum Theory, in "Collected Scientific Papers", Paper No. 37
North Holland, Amsterdam

Fowler, T.K.; 1963: Lyapunov's Stability Criteria for Plasma
Journal of Mathematical Physics 4, 559

Frank, L.A.; Ackerson, K.L.; 1971a: Observations of Charged Particle Precipitation into the Auroral Zone
J. Geophys. Res. 76, 3612

Frank, L.A.; D.A. Gurnett; 1971b: Distribution of Plasmas and Electric Field over the Auroral Zone and Polar caps
J. Geophys. Res. 76, 6829

Hahn, W.; 1967: Stability of Motion
Springer Verlag, Berlin

Hasegawa, A.; Sato, T.; 1982: Existence of a Negative Potential Solitary-Wave Structure and Formation of a Double Layer
Phys. Fluids 25, 632

Infeld, E.; 1972: On the Stability of Nonlinear Cold Plasma Waves
J. Plasma Phys. 8, 105

Infeld, E.; Rowlands, G.; 1973: On the Stability of Nonlinear Cold Plasma Waves, Part 2
J. Plasma Phys. 10, 293

Iooss, G.; Joseph, D.D.; 1980: Elementary Stability and Bifurcation Theory
Springer Verlag, New York

Jones, A.V.; 1974: Aurora
D. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland

Jordan, D.W.; Smith, P.; 1977: Nonlinear Ordinary Differential Equations
Clarendon Press,Oxford

Kan, J.; 1975: Energization of Auroral Electrons by Electrostatic shock Waves
J. Geophys. Res. 80, 2089

Kamke, E.; 1943: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen
Chelsea Publishing Company

Knorr, G.; 1968: Inhomogeneous Two-Stream Instability
Phys. Fluids 11, 885

Knorr, G.; Goertz, C.; 1974: Existence and Stability of Strong Potential Double Layers
Astrophys. Space Sci. 31 209

Krall, N.; Trivelpiece, A.; 1973: Principles of Plasma Physics
McGraw-Hill, New York

Kunkel, W.B.; Rosenbluth, M.N.; 1966: Introduction to Plasma Physics, in "Plasma Physics in Theory and Applications", edited by W.B. Kunkel
McGraw-Hill, New York

Lancaster, P.; 1969: Theory of Matrices
Academic Press, New York

Langmuir, I.; 1913: The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum
Phys. Rev. 2, 450

Langmuir, I.; 1929: The Interaction of Electron and Positive Ion Space Charge in Cathode Sheats
Phys. Rev. 33, 954

Leipholz, H.; 1968: Stabilitätstheorie
Teubner, Stuttgart

Leung, P.; Wong, A.Y.; Quon, B.H.; 1981: Formation of Double Layers, in "Relation Between Laboratory and Space Plasmas"; H. Kikuchi (Ed.)
D. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland

Mizera, P.F.; Fennell, J.F.; Croley, Jr., D.R.; Corney, D.J.; 1981: Charged Particle Distributions and Electric Field Measurements From S3-3
J. Geophys. Res. 86, 7566

Mozer, F.S.; Carlson, C.W.; Hudson, M.K.; Torbert, R.B.; Parady, B.; Yatteau, J.; Kelley, M.C.; 1977: Observations of Paired Electrostatic Shocks in the Polar Magnetosphere
Phys. Rev. Lett. 38, 292

Mozer, F.S., Cattell, C.A.; Temerin, M.; Torbert, R.B.; von Glinski, S.; Woldorff, M.; Wygant, J.; 1979: The dc and ac Electric Field, Plasma Density, Plasma Temperature, and Field-Aligned Current Experiments on the S3-3 Satellite
J. Geophys. Res. 84, 5875

Mozer, F.S.; Cattell, C.A.; Hudson, M.K.; Lysak, R.L.; Temerin, M.; Torbert, R.B.; 1980: Satellite Measurements and Theories of Low Altitude Auroral Particle Acceleration
Space Science Rev. 27, 155

Northrop, T.G.; 1963: The Adiabatic Motion of Charged Particles
John Wiley & Sons, New York

Persson, H.; 1963: Electric Field along a Line of Force in a Low-Density Plasma
Phys. Fluids 6, 1756

Persson, H.; 1966: Electric Field Parallel to the Magnetic Field in a Low-Density Plasma
Phys. Fluids 9, 1090

Quon, B.H.; Wong, A.Y.; 1976: Formation of Potential Double Layers in Plasma
Phys. Rev. Lett. 47, 1393

Roederer, J.; 1970: Dynamics of Geomagnetically Trapped Radiation
Springer Verlag, Berlin

Schamel, H.; 1974: Analytic BGK Modes and their Modulational Instability
J. Plasma Phys. 13, 139

Schamel, H.; Bajarbarua, S.; 1980: Analytical Double Layers
Preprint: SFB 80-L2-070

Schamel, H.; 1983: Weak Double Layers: Existence, Stability, Evidence
Preprint: SFB 83-L4-112

Schindler, K.; 1966: A Variational Principle for One-Dimensional Plasmas
Proc. VII Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol. II, 736, Belgrad

Schindler, K.; 1974: A Theory of the Substorm Mechanism
J. Geophys. Res. 79, 2803

Schindler, K.; Pfirsch, D.; Wobig, H.; 1973: Stability of Two-Dimensional Collisionfree Plasmas
Plasma Phys. 15, 1165

Schindler, K.; Birn, J.; 1978: Magnetospheric Physics
Physics Reports 47, 2

Siljak, D.; 1969: Nonlinear Systems
John Wiley & Sons, New York

Sneddon, I.; 1972: The Use of Integral Transforms
McGraw-Hill, New York

Stern, D.; 1981: One-Dimensional Models of Quasi-Neutral Parallel Electric Fields
J. Geophys. Res. 86, 5839

Stoer, J.; Bulirsch, R.; 1973: Einführung in die Numerische Mathematik, Band 2
Springer-Verlag, Berlin

Stoer, J.; 1979: Einführung in die Numerische Mathematik I
Springer-Verlag, Berlin

Sturrock, P.A.; 1958: Kinematics of Growing Waves
Physical Review 112, 1488

Swift, D.; 1975: On the Formation of Auroral Arcs and Acceleration of Auroral Electrons
J. Geophys. Res. 80, 2096

Swift, D.; Stenbaek-Nielsen, H.C.; Hallinan, T.; 1976a: An Equipotential Model for Auroral Arcs
J. Geophys. Res. 81, 3931

Swift, D.; 1976b: An Equipotential Model for Auroral Arcs 2. Numerical Solutions
J. Geophys. Res. 81, 3935

Temerin, M.; Cerny, K.; Lotko, W.; Mozer, F.S.; 1982: Observations of Double Layers and Solitary Waves in the Auroral Plasma
Phys. Rev. Lett. 48, 1175

ter Haar, D.; 1971: Elements of Hamiltonian Mechanics
Pergamon Press

Thompson, E.H.; 1969: Algebra of Matrices
Adam Hilger, London

Wescott, E.M.; Stenbeak-Nielsen, H.C.; Davis, T.N.; Murcray, W.B.; 1975: The L = 6.6 Oosik Barium Plasma Injection Experiment and Magnetic Storm of March 7, 1972
J. Geophys. Res. 80, 951

Wescott, E.M.; Stenbeak-Nilsen, H.C.; Davis, T.N.; 1976a: Barium Plasma Injection Experiments 1. Convection Observations
J. Geophys. Res. 81, 4487

Wescott, E.M.; Stenbeak-Nilsen, H.C.; Hallinan, T.J.; Davis, T.N.; 1976b: The Skylab Barium Plasma Injection Experiments 2. Evidence for a Double Layer
J. Geophys. Res. 81, 4495

Wescott, E.M.; Stenbeak-Nilsen, H.C.; Hallinan, T.J.; Davis, T.N.; 1978: The Tordo 1 Polar Cusp Barium Plasma Injection Experiment
J. Geophys. Res. 83, 1565

Zubov, V.I.; 1964: Methods of A.M. Lyapunov and their Application
P. Noordhoff, Groningen

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Schindler, der die Arbeit angeregt hat und immer zu klärenden Diskussionen bereit war und so wesentlichen Anteil an dieser Arbeit hat.

Die Herren Dr. W. Seboldt und Dipl.-Phys. W. Zwingmann machten sich ebenfalls die Mühe, den Entwurf des Manuskriptes einer kritischen Durchsicht zu unterziehen. Frau C. Krämer übernahm das Schreiben des Manuskriptes und Frau I. Tissier und die Herren H. Wiechen, M. Hesse, R.P. Brinkmann und M. Kießling das Anfertigen der Zeichnungen. Ihnen allen möchte ich herzlich danken.

Ich danke dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) für das Stipendium, das diese Arbeit in Deutschland ermöglicht hat.

Lebenslauf

Geboren:	1. 5. 1947 in Viçosa do Ceará, Brasilien
Eltern:	Raimundo Inacio Aragão, Kaufmann Maria Bezerril Fontenele Aragão
Ehefrau:	Maria Margarida Nogueira Aragão (seit 25. 12. 1970)
Kinder:	Claus Nogueira Aragão (16. 11. 1973) Bruno Nogueira Aragão (7. 5. 1976) Ana Luisa Nogueira Aragão (17. 3. 1980)
Schulbesuch:	Ginasio Sobralense / Sobral 1957 bis 1964 Colegio Castelo Branco / Fortaleza 1965
Studium der Physik:	Universidade Federal do Ceará / Fortaleza: 1966 - 1969 (Bacharel em Física) Universidade de Brasília: 1970 - 1974 (Mestre em Física)
Thema der Arbeit:	"Geometrie und Kinematik von Ereignissen ohne Vergabelung. Anwendung auf die Reaktionen $\pi^- + D$" (in Portugiesisch)
Dozenttätigkeit:	Universidade de Brasília seit 1. 3. 1970
Stipendium:	Deutscher Akademischer Austauschdienst für Vertiefungsstudium und Promotion bei Prof. K. Schindler an der Ruhr-Universität

Bochum seit Wintersemester 1978/79

Dienstbeurlaubung: vom brasilianischen Bundesminister für Erziehung und Kultur für einen Studienaufenthalt in Deutschland

DER DRUCKER · (Alte) Buscheystraße 138 · 4630 Bochum 1 · Telefon (0234) 70 41 16